

关于点可数覆盖^{*}

——献给高国土教授 80 寿辰

林 寿

燕 鹏 飞

(宁德师范高等专科学校数学系 宁德 352100) (安徽大学数学系 安徽合肥 230039)

摘要 综述了 1994 年以来国际上关于点可数覆盖研究的最新进展,涉及度量空间的确定 s 映象、度量空间的确定紧映象和具有点可数 k 网的空间等,列举一些尚未解决的问题供探讨.

关键词 点可数覆盖,点正则覆盖,星可数覆盖, k 网, cs^* 网, cs 网,紧覆盖映射,序列覆盖映射

中图分类号 O 189.11

1 定义

1960 年 Ponomarev 用度量空间的开 s 映象刻画了具有点可数基的空间,为 Alexandroff 的空间分类思想奠定了基础,引导了一批一般拓扑学工作者对点可数族的浓厚兴趣^[1]. 对由点可数覆盖所确定的广义度量空间理论的较为系统研究的 3 篇重要论文是 1976 年 Burke 和 Michael 的“关于一定的点可数覆盖”^[2]、1984 年 Gruenhage, Michael 和 Tanaka 的“由点可数覆盖所决定的空间”^[3]以及 1987 年 Tanaka 的“点可数覆盖与 k 网”^[4]. 这些论文的大部分结果已列入作者 1995 年出版的《广义度量空间与映射》^[5]. 现在,点可数覆盖理论的研究依然是拓扑学中较活跃的课题之一,它对数学的贡献不仅体现在是构成一般拓扑学中广义度量空间理论的重要部分,而且在泛函分析、拓扑群等方向上也有一定的应用. 本文综述 1994 年以来国际上关于点可数覆盖研究的最新进展,列举一些尚未解决的问题供有兴趣的读者进一步探讨.

文中所论空间均满足正则且 T_1 分离性公理,映射指连续的满函数,未定义的术语和记号以[5]为准. 先回忆一些映射和覆盖的定义,然后说明这些概念之间的初步关系.

定义 1.1 设映射 $f: X \rightarrow Y$.

(1) f 称为紧覆盖映射^[6],若 Y 的任一紧子集是 X 中某紧子集在 f 下的象.

(2) f 称为序列商映射^[7],若 Y 中的序列 $y_n \rightarrow y$,那么存在子序列 $\{y_{n_i}\}$ 和 $x_i \in f^{-1}(y_{n_i})$ 使得在 X 中 $x_i \rightarrow x \in f^{-1}(y)$.

(3) f 称为序列覆盖映射^[8],若 Y 中的序列 $y_n \rightarrow y$,那么存在 $x_n \in f^{-1}(y_n)$ 使得在 X 中 $x_n \rightarrow x \in f^{-1}(y)$.

(4) f 称为伪序列覆盖映射,若 Y 的任一收敛序列(含极限点)是 X 中某紧子集在 f 下的象.

(5) f 称为 1 序列覆盖映射^[9],若对于 $y \in Y$ 存在 $x \in f^{-1}(y)$ 满足条件:如果 Y 中的序列 y_n

* 收稿日期:1998 - 09 - 15

林 寿,男,1960 年 3 月出生,教授

国家自然科学基金、福建省自然科学基金资助项目

$\rightarrow y$, 那么存在 $x_n \in f^{-1}(y_n)$ 使得在 X 中 $x_n \rightarrow x$.

(6) f 称为 2 序列覆盖映射^[9], 若对于 $y \in Y$ 及 $x \in f^{-1}(y)$ 满足条件: 如果 Y 中的序列 $y_n \rightarrow y$, 那么存在 $x_n \in f^{-1}(y_n)$ 使得在 X 中 $x_n \rightarrow x$.

关于各类序列覆盖映射在文献中有一些不同命名. 序列商映射的命名来源于它等价于叙述: 如果 $R \subset Y$ 且 $f^{-1}(R)$ 是 X 的序列开集, 则 R 是 Y 的序列开集. 文[3]中所定义的“序列覆盖映射”在此采用“伪序列覆盖映射”的术语. 文[10]定义了子序列覆盖映射, 即若 K 是象空间 Y 的收敛序列, 则存在原象空间 X 的紧子集 L 使得 L 在 f 下的象是 K 的子序列. 显然, 2 序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 1 序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 序列商映射 $\Rightarrow$ 子序列覆盖映射, 而完备映射 $\Rightarrow$ 紧覆盖映射 $\Rightarrow$ 伪序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 子序列覆盖映射, 并且它们一般是不可逆的. 在与其它映射的关系上, 定义于第一可数空间上的 2 序列覆盖商映射等价于开映射^[9], 定义于点 G_δ 空间上的开闭映射是 2 序列覆盖映射^[11], 但是 2 序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 商映射, 开映射 $\Rightarrow$ 子序列覆盖映射^[9].

定义 1.2 设 R 是空间 X 的覆盖.

(1) R 称为 X 的网, 若 X 的每一开集是 R 的某子族的并.

(2) R 称为 X 的 k 网^[12], 若对 X 中的每个紧集 K 及 X 中包含 K 的开集 V , 存在 R 的有限子族 R' 使得 $K \subset R' \subset V$.

(3) R 称为 X 的 cs^* 网^[13] (cs 网^[14]), 若 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于点 x 的序列并且 V 是 x 在 X 中的邻域, 则存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$ (存在 $m \in \mathbb{N}$) 和 $P \in R$ 使得 $\{x\} \cup \{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\} \subset P \subset V$.

具有 σ 局部有限 k 网的空间称为 k 空间.

定义 1.3 设空间 X 的子集族 $R = \{R_x : x \in X\}$ 满足: 对于 $x \in X$, R_x 是 x 在 X 中的网, 即 $R_x \subset (R)_x$ 且若 G 是 x 在 X 中的邻域, 则存在 $P \in R_x$ 使得 $P \subset G$; 并且如果 $U, V \in R_x$, 那么存在 $W \in R_x$ 使得 $W \subset U \cap V$.

(1) R 称为 X 的序列邻域网^[9], 若每一 R_x 的元是 x 在 X 中的序列邻域.

(2) R 称为 X 的序列开网^[9], 若每一 R_x 的元是 X 的序列开集.

(3) R 称为 X 的弱基^[15], 若 $G \subset X$ 使得对于 $x \in G$ 存在 $P \in R_x$ 有 $P \subset G$, 那么 G 是 X 的开集.

具有 σ 局部有限弱基的空间称为 g 可度量空间. 显然, 空间 X 的基是序列开网、弱基和 k 网, 序列开网和弱基都是序列邻域网, 序列邻域网是 cs 网, cs 网是 cs^* 网; 在序列空间中, 序列邻域网是弱基, 序列开网是基; 而点可数的 cs^* 网是 k 网当且仅当空间的每一紧子集是序列子空间^[5].

下面介绍几个点可数覆盖转化的结果. 刘川和戴牧民^[16]证明了具有点可数闭 k 网的 k 空间 X 若有点 G_δ 性质且不含有闭子空间同胚于 S_ω , 则 X 是 g 第一可数空间.

命题 1.4^[17,18] 对于空间 X , 下述条件相互等价:

(1) X 具有点可数弱基.

(2) X 是具有点可数 cs 网的 g 第一可数空间.

(3) X 是具有点可数 cs 网的序列空间且不含有闭子空间同胚于 S_ω .

具有点可数 cs^* 网的序列空间且不含有闭子空间同胚于 S_ω 未必具有点可数的 cs 网(见文 [5] 例 2.9.27).

命题 1.5^[18] 对于空间 X , 下述条件相互等价:

- (1) X 具有点可数基.
- (2) X 是具有点可数 k 网的强 Fréchet 空间.
- (3) X 是具有点可数 cs^* 网的序列空间且不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω .

问题 1.6^[19] 设 X 是具有点可数 cs^* 网的序列空间, 若 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 (即 X 是 Fréchet 空间), 那么 X 是否具有点可数 cs 网?

2 度量空间的确定 s 映象

度量空间中点可数基的 s 映象是点可数覆盖, 所以点可数覆盖的研究必涉及度量空间的确定 s 映象. Svetlichny^[20] 的序列基概念是为刻画度量空间确定的商映象而引入的, 从 Tanaka^[4] 的论文知具有确定 cs^* 网的序列空间也具有同样的作用. 由此可推测两个概念虽在形式上有一定的差异, 但因为产生的作用是一致的, 故存在着必然的联系.

定义 2.1 设空间 X 的子集族 $\mathbf{R}$ 满足对每一 $x \in X$ 存在 $\mathbf{R}_x \subset \mathbf{R}$ 具有性质: 如果 $(P_n) \subset \mathbf{R}_x$, 那么 $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 x 在 X 中的下降的网. $\mathbf{R}$ 称为 X 的序列网 (序列基^[20]), 如果 $P \subset X$ 且对任意的 $x \in P$ 及任意的 $(P_n) \subset \mathbf{R}_x$ 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $P_m \subset P$, 则 P 是 X 的序列开集 (开集).

空间 X 的序列网是 cs^* 网, 但是空间的 cs^* 网未必是序列网.

定理 2.2 对于空间 X , 下述条件相互等价:

- (1) X 具有点可数序列网.
- (2) X 具有点可数的 cs^* 网.
- (3) X 是度量空间的子序列覆盖 (序列商, 伪序列覆盖) s 映象. 推论 2.3^[20] 对于空间 X ,

下述条件相互等价:

- (1) X 具有点可数序列基.
- (2) X 是具有点可数 cs^* 网的序列空间.
- (3) X 是度量空间的 (子序列覆盖, 序列商, 伪序列覆盖) 商 s 映象.

可分度量空间或局部紧度量空间的商 s 映象都有好的特征, 但下述局部可分度量空间的商 s 映象的刻画却显得有点繁杂, 寻找一个更好的内在刻画是一个有趣的问题.

定理 2.4^[10] 空间 X 是局部可分度量空间的商 s 映象当且仅当 X 是序列空间, 并且存在 X 的点可数覆盖 $\{X_\alpha : \alpha \in \mathbb{A}\}$ 使得每一 X_α 有可数网 $\mathbf{R}_\alpha$ 满足对 X 的每一收敛序列 s 有 $\beta \in \mathbb{A}$ 使得 $\mathbf{R}_\beta$ 是 s 的某子序列的 cs 网.

由此可知, 具有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数 cs^* 网的序列空间是局部可分度量空间的商 s 映象. 其逆是否成立还是一个尚未解决的问题^[10]. 在定理 2.2 中将 cs^* 网加强为 cs 网可获得较好的映射定理.

定理 2.5^[21] 空间 X 具有点可数 cs 网当且仅当 X 是度量空间的序列覆盖的 s 映象.

关于度量空间商 s 映象研究的重要公开问题是: 度量空间的商 s 映象是否是度量空间的

紧覆盖商 s 映象^[22]? 涉及到度量空间的商 s 映象的刻画(推论 2.3)和度量空间的紧覆盖商 s 映象的刻画(定理 2.7). 度量空间的紧覆盖商 s 映象的刻画可用强 k 网或紧有限分解网获得.

定义 2.6 (1) 设 K 是空间 X 的紧子集. 由 K 的闭子集组成的 K 的有限覆盖称为 K 的紧有限分解(compact finite partition). 若 K 在 X 中的有限覆盖 R 存在 K 的紧有限分解——加细, 则称 R 是 K 的 CFP 覆盖.

(2) 设 R 是空间 X 的覆盖. R 称为 X 的强 k 网^[23], 若对 X 中的每个紧集 K , 存在 R 的可数子族 $R(K)$ 满足: 对 K 的任意紧子集 L 和 X 中包含 L 的开集 V , 存在 $R(K)$ 的有限子族 R' 使 R' 是 K 的 CFP 覆盖且 $R' \subset V$.

(3) 设 R 是空间 X 的覆盖. R 称为 X 的紧有限分解网(序列有限分解网), 若对 X 中的每个紧集(含极限点的收敛序列) K 及 X 中包含 K 的开集 V , 存在 R 的有限子族 R' 使 R' 是 K 的 CFP 覆盖且 $R' \subset V$.

显然, 空间的闭 k 网或强 k 网都是紧有限分解网, 紧有限分解网是 k 网. 设 R 是空间 X 的点可数覆盖, 则 R 是空间 X 的 cs^* 网当且仅当它是 X 的序列有限分解网, 而在每一紧子集均可度量化空间中的点可数 cs 网也是紧有限分解网.

定理 2.7 对于空间 X , 下述条件相互等价:

- (1) X 具有点可数的强 k 网.
- (2) X 具有点可数的紧有限分解网.
- (3) X 是度量空间的紧覆盖 s 映象.

序列覆盖且紧覆盖 s 映象的刻画可利用 cs 网获得.

推论 2.8 (1) 空间 X 具有点可数 cs 网且每一紧子集可度量化当且仅当 X 是度量空间的序列覆盖且紧覆盖的 s 映象^[21].

(2) 空间 X 是有点可数 cs 网的序列空间当且仅当 X 是度量空间的序列覆盖且紧覆盖的商 s 映象^[21].

(3) 空间 X 是有点可数的紧有限分解网的 k 空间当且仅当 X 是度量空间的紧覆盖商 s 映象.

适当的映射对保持空间之间的集族是至关重要的. 如映射保持网、开映射保持基、紧覆盖映射保持 k 网、序列覆盖映射保持 cs 网、子序列覆盖映射保持 cs^* 网等. 1 序列覆盖映射和 2 序列覆盖映射正是为了寻求保持弱基、序列邻域网或序列开网性质的映射而引入的^[9].

定理 2.9^[9] (1) 空间 X 具有点可数序列邻域网当且仅当 X 是度量空间的 1 序列覆盖的 s 映象.

(2) 空间 X 具有点可数序列开网当且仅当 X 是度量空间的 2 序列覆盖的 s 映象.

推论 2.10^[9] (1) 空间 X 具有点可数弱基当且仅当 X 是度量空间的 1 序列覆盖的商 s 映象.

(2) 空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是度量空间的 2 序列覆盖的商 s 映象.

3 度量空间的确定紧映象

度量空间的紧映象的最早结果当属完备映射保持可度量性. Alexandroff 在 1960 年为研究度量化问题引入了一致基和点正则基的概念^[24], 1962 年和 1976 年 Arhangel'skii 分别证明了度

量空间的开紧映象或伪开紧映象都等价于具有一致基的空间(见文[5]定理 2.9.18). 这些结果成为近年来研究新的度量化定理和度量空间的确定紧映象的出发点. 先引用几个术语.

定义 3.1 设 R 是空间 X 的覆盖.

(1) R 称为 X 的点正则覆盖^[24], 若 $x \in U \in \tau$, 则 $\{P \in R : x \in P \subseteq U\}$ 是有限的.

(2) R 称为 X 的一致覆盖^[24], 若对于 $x \in X$, 如果 R' 是 $(R)_x$ 的可数无限子集, 则 R' 是 x 在 X 中的网.

(3) R 称为 X 的 cs 覆盖, 若 X 中的每一收敛序列终于 R 中的某元.

(4) R 称为 X 的 sn 覆盖(so 覆盖, g 覆盖), 若 R 中的每一元是 X 中某点的序列邻域(序列开集, 弱邻域)且对于任意的 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的序列邻域 $P \in R$.

R 是空间 X 的一致覆盖等价于 R 是 X 的点正则覆盖.

定理 3.2^[25] 对于空间 X , 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的子序列覆盖(序列商, 伪序列覆盖)紧映象.

(2) X 具有点有限的覆盖列 $\{R_n\}$ 使得对于 $x \in X$, $\{st(x, R_n) : n \in N\}$ 是 x 在 X 中的序列邻域网.

推论 3.3^[25] 对于空间 X , 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的(子序列覆盖, 序列商, 伪序列覆盖)商紧映象.

(2) X 具有点有限的覆盖列 $\{R_n\}$ 使对于 $x \in X$, $\{st(x, R_n) : n \in N\}$ 是 x 在 X 中的弱邻域.

类似地, 可获得度量空间的紧覆盖(商)紧映象、局部可分度量空间的(紧覆盖)商紧映象的刻画等^[10, 23, 25].

定理 3.4 对于空间 X , 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖(序列覆盖)紧映象.

(2) X 具有点正则序列邻域网.

(3) X 具有点正则 cs 网.

(4) X 具有点有限的 sn 覆盖列 $\{R_n\}$ 使对于 $x \in X$, $\{st(x, R_n) : n \in N\}$ 是 x 在 X 中的网.

(5) X 具有点有限的 cs 覆盖列 $\{R_n\}$ 使得对于 $x \in X$, $\{st(x, R_n) : n \in N\}$ 是 x 在 X 中的网^[26].

推论 3.5 对于空间 X , 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖(序列覆盖)商紧映象.

(2) X 具有点正则 cs 网的序列空间.

(3) X 具有点正则弱基.

(4) X 具有点有限的 g 覆盖列 $\{R_n\}$ 使对于 $x \in X$, $\{st(x, R_n) : n \in N\}$ 是 x 在 X 中的网.

定理 3.6 对于空间 X , 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 2 序列覆盖紧映象.

(2) X 具有点正则的序列开网.

(3) X 具有点有限的 so 覆盖列 $\{R_n\}$ 使对于 $x \in X$, $\{st(x, R_n) : n \in N\}$ 是 x 在 X 中的网.

问题 3.7 用度量空间的确定的映象特征具有点正则 cs^* 网的序列空间?

4 具有点可数 k 网的空间

Michael 曾证明具有点可数闭 k 网的 k 空间是度量空间的紧覆盖商 s 映象^[3],但是即使是具有点可数基的空间(即度量空间的开 s 映象)也未必具有点可数的闭 k 网^[27]. 目前尚未找到“好的”映射将具有点可数 k 网的空间刻画为度量空间在这映射下的象,然而具有点可数 k 网的空间与本文第 2 节中提到的几类空间关系密切,并且其自身也有很好的性质.

先看具有点可数 k 网空间的映射性质. 完备映射保持具有点可数 k 网的空间^[3],但完备映射不保持具有点可数弱基、具有点可数 cs 网以及具有点可数 cs^* 网的空间^[5,28]. 闭映射不保持具有点可数 k 网的空间^[29]. s 网是一个与 k 网相关且有较好的闭映射性质.

定义 4.1^[30] 设 $\mathbf{R}$ 是空间 X 的子集族. $\mathbf{R}$ 称为 X 的 s 网,若它是 X 的网,且对 X 的任一非闭子集 A ,存在 $x \in X$ 满足对点 x 在 X 中的任一邻域 U 有 $P \in \mathbf{R}$ 使得 $P \cap A$ 是无限的.

点可数的 s 网是 k 网,而在 k 空间中, k 网是 s 网^[30].

定理 4.2^[30] 闭映射保持点可数 s 网.

定理 4.3^[17,31,32] 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个闭映射, X 具有点可数 k 网. 如果下列条件之一成立, 则 f 是紧覆盖映射且 Y 具有点可数 k 网.

- (1) X 是一个 k 空间.
- (2) X 具有点 G_δ 性质.
- (3) X 是正规, 等紧空间.
- (4) 每一 $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间.

推论 4.4 (1) 开闭映射保持具有点可数基的空间^[17].

(2) 点可数基空间的闭映象具有点可数 π 基^[30].

下面介绍具有点可数 k 网的 k 空间上的闭映射分解定理. 在 1965 年 Lašnev 证明了对于度量空间 X , 若 $f: X \rightarrow Y$ 是闭映射, 那么存在 Y 的 σ 闭离散子空间 Z 使得对于每一 $y \in Y \setminus Z$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集(见文[5]定理 3.3.7). 对于具有点可数基的空间, Lašnev 型的闭映射的分解定理并不成立. 空间 X 的子集族 $\mathbf{R}$ 称为 X 的 d 族, 如果 X 的每一个形式 $D = \{x_p : x_p \in P, P \in \mathbf{R}\}$ 的子集是 X 的闭离散子集.

定理 4.5 (1) 设空间 X 是具有点可数 k 网的 k 空间, $f: X \rightarrow Y$ 是闭映射并且 Y 有 σ - d 网, 那么存在 Y 的 σ 闭离散子空间 Z 使得对每一 $y \in Y \setminus Z$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集.

(2) 设空间 X 是具有点可数 cs^* 网的 k 空间, $f: X \rightarrow Y$ 是闭映射, 令 $Z = \{y \in Y : f^{-1}(y) \text{ 不是 } X \text{ 的紧子集}\}$, 若 Z 是 k 空间, 那么 Z 是 Y 的 ω_1 相对离散子空间.

(3) 设空间 X 具有点可数基且 $f: X \rightarrow Y$ 是闭映射, 那么存在 Y 的 ω_1 相对离散子空间 Z 使得 $|Z| < d(Y)$ 且对每一 $y \in Y \setminus Z$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集.

在具有点可数 k 网的 k 空间中弱第一可数性可用一些特殊的子空间来刻画.

定理 4.6^[18] 设 X 是一个具有点可数 k 网的 k 空间, 那么

- (1) X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 .

(2) X 是 α_4 空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω .

(3) X 是第一可数空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω .

问题 4.7^[29] 是否任一空间可表为具有点可数 k 网的空间的闭映象?

问题 4.8(刘川) 设 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间,若 X 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1} ,那么 X 是否具有点可数的 cs^* 网?

5 相关结果

点可数 k 网空间在拓扑群上的应用.

定理 5.1^[33] 设 G 是具有点可数 k 网的序列空间,如果 G 是拓扑群且 $so(G) < \omega_1$,则 G 可度量化.

点可数 k 网空间在乘积空间的应用.

定理 5.2^[34] 设 X 和 Y 都是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间,如果 $X \times Y$ 是序列空间,那么 $so(X \times Y) \leq 2$.

点可数 cs 网空间在 CW 复形上的应用.

定理 5.3^[35] 具有点可数 cs 网的 CW 复形是 $\aleph$ 空间.

问题 5.4^[19] 设空间 X 由度量空间族所控制,如果 X 具有点可数 cs 网,那么 X 是否是 $\aleph$ 空间?

局部可数集族、星可数集族、紧可数集族都与点可数集族有关,它们可获得比点可数集族更好的结果.

定理 5.5^[35] 设 X 是 Fréchet 空间,那么 X 具有局部可数 k 网当且仅当 X 具有星可数 k 网且不含有子空间同胚于 S_{ω_1} .

定理 5.6^[17,35,36] 对于空间 X ,下述条件相互等价:

- (1) X 是局部可分度量空间的闭映象.
- (2) X 是度量空间的闭映象且 X 的每一第一可数的子空间是局部可分的.
- (3) X 是具有星可数 k 网的 Fréchet 空间.
- (4) X 是具有由可分子集组成的点可数 k 网的 Fréchet 空间.

问题 5.7^[19] (1) 将具有星可数 k 网的 (k) 空间刻画为度量空间的“好的”映象.

(2) 将具有紧可数 k 网的 $(k, \text{Fréchet})$ 空间刻画为度量空间的“好的”映象.

(3) 设 X 是一个具有星可数 k 网的 k 空间,如果 X 具有点可数的 cs 网, X 是否是一个 $\aleph$ 空间?

最后列举几个与序列覆盖映射相关的广义度量空间的映射定理.

定理 5.8 (1) 序列覆盖的闭映射保持 $\aleph$ 空间.

(2) 1 序列覆盖的闭映射保持 g 可度量空间.

(3) 1 序列覆盖的伪开映射保持具有点可数基的空间.

(4) 1 序列覆盖的商映射保持 g 第一可数性.

问题 5.9 Fréchet 的 $\aleph$ 空间是否是度量空间的序列覆盖闭映象?

与点可数覆盖相关的还有“点可数基问题”^[37].

注 本文的一个摘要 1998 年 8 月在中国科协第 3 届青年学术年会上报告过.并刊登于:信息科学与微电

子技术(中国科协第 3 届青年学术年会论文集). 北京:中国科学技术出版社,1998. 256 ~ 259

参 考 文 献

- 1 Arhangel'skii A, Dranishnikov A P S. Alexandroff and topology: an introductory note. *Topology Appl*, 1997, 80: 1~ 6
- 2 Burke D, Michael E. On certain point - countable covers. *Pacific J Math*, 1976, 64: 79~ 92
- 3 Gruenhage G, Michael E, Tanaka Y. Spaces determined by point - countable covers. *Pacific J Math*, 1984, 113: 303~ 332
- 4 Tanaka Y. Point - countable covers and k - networks. *Topology Proc*, 1987, 12: 327~ 349
- 5 林 寿. 广义度量空间与映射. 北京: 科学出版社, 1995
- 6 Michael E. A note on closed maps and compacts. *Israel J Math*, 1964, 2: 173~ 176
- 7 Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient mappings. *Czech Math J*, 1976, 26: 174~ 182
- 8 Siwiec F. Sequence - covering and countably - bi - quotient mappings. *General Topology Appl*, 1971, 1: 143~ 154
- 9 林 寿. 关于序列覆盖 s 映射. *数学进展*, 1996, 25: 548 ~ 551
- 10 Lin Shou(林 寿), Liu Chuan(刘 川), Dai Mumin(戴牧民). Images on locally separable spaces. *Acta Math Sinica*, 1997, 13: 1 ~ 8
- 11 Yun Ziqiu(恽自求). A new characterization of $\aleph$ - spaces. *Topology Proc*, 1991, 16: 253~ 256
- 12 O'Meara P. On paracompactness in function spaces with the compact - open topology. *Proc Amer Math Soc*, 1971, 29: 183 ~ 189
- 13 Gao Zhimin(高智民). $\aleph$ - space is invariant under perfect mappings. *Questions Answers in General Topology*, 1987, 5: 271 ~ 279
- 14 Guthrie J. A characterization of $\aleph_0$ - spaces. *General Topology Appl*, 1971, 1: 105~ 110
- 15 Arhangel'skii A. Mappings and spaces. *Russian Math Surveys*, 1966, 21(4): 115 ~ 162
- 16 Liu Chuan(刘 川), Dai Mumin(戴牧民). g - metrizable and S_0 . *Topology Appl*, 1994, 60: 185 ~ 189
- 17 Lin Shou(林 寿), Tanaka Y. Point - countable k - networks, closed maps and related results. *Topology Appl*, 1994, 59: 79 ~ 86
- 18 Lin Shou(林 寿). A note on the Arens' space and sequential fan. *Topology Appl*, 1997, 81: 185~ 196
- 19 Liu Chuan(刘 川), Tanaka Y. Spaces with certain compact - countable k - networks and questions. *Questions Answers in General Topology*, 1996, 14: 15~ 38
- 20 Svetlichny S A. Some classes of sequential spaces. *Bull Austral Math Soc*, 1993, 47: 377~ 384
- 21 林 寿. Michael - nagami 问题的注记. *数学年刊*, 1996, 17A: 9 ~ 12
- 22 Michael E. Some problems. In: *Open Problems in Topology*, J van Mill and G M Reed Eds, Amsterdam: North - Holland, 1990. 271 ~ 278
- 23 刘 川, 戴牧民. 度量空间的紧覆盖 s 象. *数学学报*, 1996, 39: 41 ~ 44
- 24 Alexandroff P. On the metrization of topological spaces. *Bull Pol Acad Math*, 1960, 8: 135~ 140
- 25 燕鹏飞. 度量空间的紧映象. *数学研究*, 1997, 30: 185 ~ 187, 198
- 26 Yan Pengfei(燕鹏飞). On strong sequence - covering compact mappings. *Northeastern Math J*, 1998, 14: 341~ 344
- 27 Foged L. Point - countable bases and k - networks. *Topology Appl*, 1996, 69: 101~ 114
- 28 Tanaka Y, Xia Shengxiang(夏省祥). Certain s - images of locally separable metric spaces. *Questions Answers in General Topology*, 1996, 14: 217~ 231
- 29 Sakai M. Remarks on spaces with special type of k - networks. *Tsukuba J Math*, 1997, 21: 443~ 448
- 30 Shibakov A. On spaces with point - countable k - networks and their mappings. *Serdica - Bulgaricae Math Pub*, 1994,

20:48 ~ 55

- 31 Lin Shou(林 寿), Liu Chuan(刘 川). On spaces with point - countable cs - networks. *Topology Appl*, 1996, 74:51 ~ 60
- 32 Shibakov A. Closed mapping theorems on k - spaces with point - countable k - networks. *Comment Math Univ Carolinae*, 1995, 36:77 ~ 87
- 33 Shibakov A. Metrizability of sequential topological groups with point - countable k - networks. *Proc Amer Math Soc*, to appear
- 34 Nogura T, Shibakov A. Sequential order of product spaces. *Topology Appl*, 1995, 65:271 ~ 285
- 35 Liu Chuan(刘 川), Tanaka Y. Spaces with a star - countable k - network and related results. *Topology Appl*, 1996, 74:25 ~ 38
- 36 Sakai M. On spaces with a star - countable k - network. *Houston J Math*, 1997, 23:45 ~ 56
- 37 Collins P J, Reed G M. The point - countable base problem. In: *Open Problems in Topology*, J van Mill and G M Reed Eds, Amsterdam:North - Holland, 1990. 237 ~ 250

On Point - countable Covers

To Professor Gao Guoshi on His 80th Birthday

Lin Shou

(Department of Mathematics, Ningde Teachers College Ningde 352100)

Yan Pengfei

(Department of Mathematics, Anhui University Hefei Anhui 230039)

Abstract In this paper the newest advances about point - countable covers have been given at home and abroad since 1994. It contains the following contents: the certain s - images of metric spaces, the certain compact images of metric spaces, spaces with point - countable k - networks and questions.

Keywords point - countable cover, point - regular cover, star - countable cover, k - network, cs^{*} - network, cs - network, compact - covering map, sequence - covering map