覆盖性质与广义度量空间十五年

林　寿　　张从军

（宁德师专数学科）（淮北煤师院数学系）

摘　　要

本文评述从1976年至1991年覆盖性质与广义度量空间的发展状况，侧重描述该课题的一些富有成果的研究方向，同时包括了我国学者的部分工作。

关键词　拓扑空间，覆盖性质，广义度量空间

1　引言

上个世纪末至本世纪初的公理化运动孕育了一般拓扑学。仿紧性的引入及发现了一般空间的度量化定理诞生了覆盖性质与广义度量空间这一一般拓扑学研究的重要课题。从本世纪四十年代至七十年代中期，学者们为它的蓬勃发展作出了一系列使其充满活力的卓越贡献。在引人注目的诸多方面（如度量化问题，积空间的仿紧性，空间及其分类原则）的研究上取得了丰硕的成果，使其构成了一个较为成熟和完整的研究方向。然而，现代数学日新月异的迅猛发展对拓扑空间论的生存及前途提出了新的挑战。学者们为它的前景感到忧虑。这自然与近几十年来拓扑空间论的研究手段以及所产生的急待解决的问题息息相关。各种形式的“推广”所定义的空间类已达到泛滥的状态，新空间的不断引入，过细的分划，研究手段的陈旧以及方法缺乏创新等不能不说是一种衰退的迹象。如何摆脱这种困境，克服徘徊不前的局面使其焕发青春，一直困扰着当代的一般拓扑学工作者。

1975至1976年，由于在覆盖性质与广义度量空间方面的研究硕果累累，对一般拓扑学者是个好兆头。例如：

(1)Rudin[1-2]讨论了与紧因子或度量因子乘积的正规性。

(2)Chaber[3]和Wicke，Worrell[4]分别证明了具有G_δ—对角线和弱次亚Lindelöf的空间是等紧空间。

(3)Burke等[5]证明了具有σ—遗传闭包保持基的正则空间是可度量化空间，Reed[6]证明了正规局部紧，局部连通的Moore空间是度量化空间。

(4)Gruenhage[7]证明了M_3—空间是M_2—空间。

(5)Telgařsky[8]建立了一般拓扑学中的博奕理论。

(6)Arhangel′ skii[9]开始了对函数空间拓扑性质的系统研究。

人们期待着这些能给一般拓扑学注入新鲜血液，不断拓广自己的研究领域，创造新的研究工具和手段。回顾十五年来的发展，一般拓扑学确有新的突破和飞跃。一般拓扑学者在困境中艰苦不懈的努力是卓有成效的。本文就作者对覆盖性质与广义度量空间的粗浅了解，力图阐明国际上关于该课题的一些研究方向及成果，同时注意结合我国学者的工作[10-11]。

本文所论空间均满足T_2分离性公理，映射指连续的满函数。

本文于1992年4月21日收到，
＊国家自然科学基金资助项目。

2 广义仿紧空间的特征

对拓扑性质的深入研究常借助于这性质的各种本质属性。五十年代 Michael 对仿紧性及六十年代 Burke 对次仿紧性的优美刻划都曾对一般拓扑学的发展起到举足轻重的作用。离散集族、局部有限集族及闭包保持集族的广泛应用反映了那个年代的研究特色及学者们所追寻的目标。然而，Alexandroff 和 Urysohn[12]早期关于紧空间的特征：每一良序开覆盖具有有限子覆盖，并没有引起人们多大的关注。只有 Mack[13]及 Sconyer[14]做过一些基础性的工作：空间 X 是仿紧（亚紧）当且仅当 X 的每一良序开覆盖有局部有限（点有限）的开加细。1978年起，Junnila 充分注意到了这两种思想的结合，通过对次亚紧性等一系列广义仿紧空间的深入研究，给出了许多新的重要特征，有力地促进了覆盖性质及某些广义度量空间理论的进一步发展。

2.1 狭义拟仿紧空间

狭义拟仿紧空间是我国学者刘应明[15]为了同时推广次仿紧空间及亚紧空间而引入的。空间 X 称为狭义拟仿紧的，如果 X 的每一开覆盖有一个 σ－相对离散相对闭加细。近来的研究表明，狭义拟仿紧性严格地介于次亚紧性和弱次亚紧性之间[16－17]，其重要作用之一是仿紧，次仿紧，亚紧及次亚紧等都能分解以狭义拟仿紧作为一个因子，这表明了用狭义拟仿紧性统一刻划这些覆盖性质方面的理论价值。

定理 2.1.1[15－18] 设 X 是狭义拟仿紧空间，则

（1） X 是仿紧空间当且仅当 X 是集态正规空间。

（2） X 是次仿紧空间当且仅当 X 是集态次正规空间。

（3） X 是亚紧空间当且仅当 X 是离散亚可膨胀空间。

（4） X 是次亚紧空间当且仅当 X 是离散次亚可膨胀空间。

上述定理中的离散亚可膨胀空间即离散几乎可膨胀空间，离散次亚可膨胀空间即离散 θ－可膨胀空间。

问题 2.1.2[19] 是否存在 T_2 或正则的非狭义拟仿紧的弱 $\bar{\theta}$－可加细空间？

2.2 次亚紧空间、亚紧空间及次仿紧空间

Junnila 的重要贡献之一在于他在前人的基础上应用良序集族，定向集族，内部保持集族，半开集族等给出次亚紧性等广义仿紧性的深刻工作。

定理 2.2.1[20] 下列条件相互等价：

（1） X 是次亚紧空间。

（2） X 的每一（内部保持的）定向开覆盖有 σ－闭包保持的闭加细。

（3） X 的每一良序开覆盖有开的 θ－加细序列。

（4） X 的每一开覆盖有半开的点星形 $\dot{F}$－加细序列。

由上述定理知强 $\Sigma^{\#}$－空间是次亚紧空间，以及闭映射保持次亚紧空间（解决了 Boone[21]的一个问题）。

问题 2.2.2[22] 对于空间 X，下列各条是否等价？

（1） X 是次亚紧空间。

（2） X 的每一定向开覆盖有开的点星形加细序列。

（3） X 的每一定向开覆盖有 σ－垫状加细。

对于亚紧空间和次仿紧空间可得到一些相应的刻划。

定理 2.2.3[20][23]　下列各条相互等价：

(1)　X 是亚紧空间。

(2)　X 的每一(内部保持的)定向开覆盖有闭包保持的闭加细。

(3)　X 的每一开覆盖有半开的点星形F—加细。

定理 2.2.4[20]　下列各条相互等价：

(1)　X 是次仿紧空间。

(2)　X 的每一(内部保持的)开覆盖有 σ—闭包保持的闭加细。

(3)　X 的每一开覆盖有 σ—垫状加细。

(4)　X 的每一开覆盖有半开的点星形加细序列。

等价条件(1)、(3)解决了 Burke[24]和 Katuta[22]的问题。但是关于亚紧性的相应问题仍久悬未决。

问题 2.2.5[22]　对于空间 X，下列各条是否等价？

(1)　X 是亚紧空间。

(2)　X 的每一定向开覆盖有开的点星形加细。

(3)　X 的每一定向开覆盖有垫状加细。

2.3　Junnila 方法的应用

Junnila 关于广义仿紧空间的特征已在映射性质、积空间覆盖性质等方面的研究获得了大量的应用。本节仅说明 Junnila 技巧在中紧及仿紧空间刻划方面的应用。

定理 2.3.1[25]　下列条件相互等价：

(1)　X 是中紧空间。

(2)　X 的每一定向开覆盖有被 X 的所有紧子集族加细的闭包保持的闭加细。

(3)　X 的每一开覆盖有半开的紧有限加细。

由上述定理知完备映射保持中紧性质，这纠正了 Mancuso[26]的一个错误。

定理 2.3.2[19][27][28]　下列条件相互等价：

(1)　X 是仿紧空间。

(2)　X 的每一开覆盖有半开的局部 W—加细(或局部星形 F^*—加细)序列。

(3)　X 的每一良序开覆盖有开的局部 θ—加细序列。

(4)　X 的每一内部保持的定向开覆盖有内部保持开的局部 W—加细(或局部星形 F^*—加细)序列。

问题 2.3.3[22]　对于空间 X，下列各条是否等价？

(1)　X 是仿紧空间。

(2)　X 的每一定向开覆盖有开的局部星形加细。

(3)　X 的每一定向开覆盖有开的垫状加细。

关于广义仿紧空间的更为详细的内容可参看蒋继光先生的专著[19]。

3　积空间的覆盖性质

讨论积空间的覆盖性质是研究积空间仿紧性的继续。由于广泛应用 Junnila 等关于广义仿紧空间的一系列强有力的刻划，近十余年来在这方面出现了喜人的局面。我们的论述依照有限积、可数积和 σ—积三种情况。

3.1 有限积的覆盖性质

模式一：对拓扑性质 $\mathscr{P}$. 设空间 X 是具有性质 $\mathscr{P}$ 的 P—空间，Y 是具有性质 $\mathscr{P}$ 的 Σ—空间，则 $X\times Y$ 具有性质 $\mathscr{P}$。

定理 3.1.1 模式一适合于下述拓扑性质：正则 Lindelöf[29]，仿紧[29]，可遮[30]，亚紧[31]，次亚紧[32]，正则次仿紧[33]，正则性质 b_1[34]，亚 Lindelöf[34]

模式二：对拓扑性质 $\mathscr{P}$。设空间 X 具有性质 $\mathscr{P}$，空间 Y 具有性质 $\mathscr{P}$ 且 $IG(DC,Y)$，那么 $X\times Y$ 具有性质 $\mathscr{P}$。

定理 3.1.2 模式二适合于下述拓扑性质：仿紧[8]，σ—中紧[35]，正则亚紧[36]，σ—亚紧[35]，亚 Lindelöf[35]，正则次亚紧[36]，正则弱次亚紧[36]，正则次仿紧[37]。

3.2 可数积的覆盖性质

模式三：对于拓扑性质 $\mathscr{P}$。设空间族 $\{X_i: i\in N\}$ 中的每一空间是具有性质 $\mathscr{P}$ 的 Σ—空间，那么 $\prod_{i=1}^{\infty}X_i$ 具有性质 $\mathscr{P}$。

定理 3.2.1 模式三适合于下述拓扑性质：正则 Lindelöf[29]，仿紧[29]，亚紧[38]，中紧[39]，次仿紧[32]。

3.3 σ—积的覆盖性质

由于 $N^{\aleph_1}$ 不是次亚紧空间[40]，寻求不可数无限积的覆盖性质几乎是没有意义的。于是人们转而寻求不可数无限积的适当子空间的覆盖性质。Corson[41]引入 σ—积似乎正是为了这种目的，因为关于 σ—积的第一个结果正是关于覆盖性质方面的：可分度量空间的 σ—积是 Lindelöf 空间。

模式四：对于拓扑性质 $\mathscr{P}$。设 $X=\sigma\{X_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$ 且 X 的每一有限子积具有性质 $\mathscr{P}$，则 X 具有性质 $\mathscr{P}$。

定理 3.3.1 模式四适合于下述拓扑性质：Lindelöf[42]，仿紧[43]，亚紧[44]，次亚紧[45]，弱 $\bar{\theta}$—可加细[46]，亚 Lindelöf[46]，几乎可膨胀[46]。

模式五：对于拓扑性质 $\mathscr{P}$。设正规空间 $X=\sigma\{X_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$ 的每一有限子积具有性质 $\mathscr{P}$，则 X 具有性质 $\mathscr{P}$。

定理 3.3.2 模式五适合于下述拓扑性质：集态正规[47]，可缩[47]，$\mathscr{B}$—性质[42]，$\mathscr{D}$—性质[48]，可膨胀性[44]，次仿紧性[44]，仿 Lindelöf[42]，σ—仿 Lindelöf[49]，σ—亚紧[49]，可遮[49]. 中紧[46]，集态次正规[46].

4 积空间的正规性

积空间的正规性与积空间的仿紧性是一对孪生兄弟，但积空间正规性显得更加本质和困难。五十年代和六十年代，Dowker，Morita 关于该课题的工作为人们进一步的工作提供了良好的借鉴。Rudin[1]的著名结果（对每一非离散空间 Y，存在正规空间 X 使 $X\times Y$ 非正规）及 Przymusiński[50]的反例（存在空间 X，使对于任给的自然数 n，X^n 是 Lindelöf，但 X^ω 非正规）说明正规性的有限积或可数积性质是很差的。但是，由于 Rudin 等的工作，关于有限积的正规性及 Σ—积，箱积的正规性还是取得一批引人注目的成果。

4.1 有限积的正规性

探讨有限积的正规性重要途径之一是讨论与紧因子积的正规性和与度量因子积的正规性

问题。Przymusinsky 的工作最为出色，通过给出充要条件使一系列古典结果为其推论。

定理 4.1.1[51]　设 $\mathscr{B}$ 是紧空间 C 的基，那么 $X\times C$ 是正规空间当且仅当 X 是正规空间且 X 的每一 $\mathscr{B}$ 覆盖有局部有限的开加细。

定理 4.1.2[51]　设 $\mathscr{B}$ 是度量空间 M 的基，那么 $X\times M$ 是正规空间当且仅当 X 是正规空间且对 X 的每一闭子集的单调族 $\{F_B:B\in\mathscr{B}\}$，如果对 $z\in M$ 有 $\bigcap\{F_B:z\in B\in\mathscr{B}\}=\varnothing$，则存在 X 的开子集族 $\{U_B:B\in\mathscr{B}\}$ 使 $F_B\subset U_B$ 且 $\bigcap\{U_B:z\in B\}=\varnothing$。

有限积正规性的另一重要线索是 Morita 的三个猜测[52]：

(Ⅰ)　X 是离散空间当且仅当对任一正规空间 Y，$X\times Y$ 是正规空间。

(Ⅱ)　X 是度量空间当且仅当对任一正规 $P-$空间 Y，$X\times Y$ 是正规空间。

(Ⅲ)　X 是 $\sigma-$局部紧的度量空间当且仅当对任一正规可数仿紧空间 Y，$X\times Y$ 是正规空间。

1978 年，Rudin[53]由证明 K—Dowker 空间的存在性证实了猜测(Ⅰ)。Morita[52]证明了如果猜测(Ⅱ)的回答是肯定的，那么猜测(Ⅲ)就是正确的。1986 年 Chiba 等[54]证明了猜测(Ⅱ)成立当且仅当存在空间 X 的一个非可缩的不可数单调开覆盖使得对任一度量空间 Y，$X\times Y$ 是正规空间。而 1985 年 Bešlagić 和 Rudin[55]证明了在集论假设(◇)下，上述断言成立。

4.2　Σ－积的正规性

由于 $N^{\aleph_1}$ 不是正规空间，人们把研究不可数无限积的正规性的兴趣转移为求积空间的适当子空间的正规性。这导致了 Corson[41]引入 Σ—积的概念以作为可数积的一种推广。Corson 在证明了完备度量空间的 Σ－积是正规空间之后问度量空间的 Σ－积是否是正规空间？这成为一个著名的公开问题。

定理 4.2.1[56-57]　度量空间的 Σ－积是正规空间。

Rudin[58]还证明了更强的结果：度量空间的 Σ－积是可缩空间。然而，紧空间的 Σ－积未必是正规空间[51]，因此讨论 Σ—积正规性一般假定因子空间是某种的广义度量空间。

定理 4.2.2[59]　对仿紧 $p-$空间的 Σ—积 $X=\Sigma\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$，不列条件相互等价：

(1)　X 是正规空间。

(2)　X 是集态正规空间。

(3)　X 有可数紧密度。

(4)　每一 X_α 有可数紧密度。

上述定理诱导人们研究广义度量空间 Σ－积的正规性。与可数积的仿紧性相类比，一是讨论仿紧 Σ－空间类，二是讨论仿紧半层空间类。

定理 4.2.3[60]　对于仿紧 Σ－空间的 Σ－积 X，若 X 是正规空间或具有可数紧密度，那么 X 是集态正规空间。

但是，Σ－积的集态正规性并不蕴涵具有可数紧密度；同时，M_1-空间的 Σ－积也未必是正规空间[60]。Yajima[61]证明了半层空间的 Σ－积是 $P-$空间和次正规空间。滕辉得到了更为深刻的结果。

定理 4.2.4[62]　半层空间的 Σ—积是集态次正规空间。

对于强 Σ－空间也有类似的结果：强 Σ－空间的 Σ－积若为次正规空间，那么它是集态次正规空间[63]

4.3　箱积的正规性

不象 Tychonoff 积空间的正规性或仿紧性那样丰富多彩，关于箱积的正规性或仿紧性的

讨论却是异常艰难。箱积的概念早在二十年代就提出，紧空间的箱积是否正规是 Stone[64]六十年代提出的一个公开问题。直到七十年代 Rudin[65]的论文才重新引起人们对箱积的关注。1975年和 1977 年 Van Douwen[66—67]构造了关于箱积的两个著名反例。

定理 4.3.1 存在可分、完备度量空间族$\{X(i):i\in N\}$使$\square_i X(i)$非正规。

定理 4.3.2 存在紧空间 X 使$\square^w X$ 非正规。

由此，人们转而讨论特定紧空间箱积的仿紧性。至今为止，在这方面大都是相容性的结果。例如，

定理 4.3.3[68] $[d=c]$ 对第一可数的紧空间族$\{X(i):i\in N\}$，$\square_i X(i)$是仿紧空间。

定理 4.3.4[69] $[CH]$ 对紧序空间族$\{X(i):i\in N\}$，$\square_i X(i)$是仿紧空间。

定理 4.3.5[70] $[b=d$ 或 $d=c]$$\square^w Q$ 是仿紧空间。

箱积目前正引起越来越多专家的注意。 我国学者杨守廉在这方面也做了一些有益的工作[71—72]。但是许多有意义且本质的问题尚未解决。

问题 4.3.6[73—74] (1) 是否有$\square^w(w+1)$仿紧性的绝对证明？

(2) 在紧空间的箱积中，正规性是否与仿紧性等价？

(3) $\square^w Q$ 是正规或仿紧空间吗？

5 可数紧空间或伪紧空间的紧性

从四十年代至七十年代，人们已得到了许多紧空间上的度量化定理。由此产生的一般性问题是这些度量化定理对于可数紧空间或伪紧空间是否成立？如具有 G_δ—对角线的可数紧空间是否是可度量化空间？[75—76] 具有 σ—点有限基的伪紧空间是否是可度量化空间？[77]这激发了人们讨论在什么附加条件下，可数紧空间或伪紧空间是紧空间。

5.1 可数紧空间的紧性

在附加广义度量性质和覆盖性质方面，Chaber[3] 和 Wicke、Worrell[4] 分别证明了具有拟 G_δ—对角线和弱次亚 Lindelöf 的可数紧空间是紧空间。Arhangel′skii[78]定义的纯空间同时推广了它们的结果。

定理 5.1.1[78] 纯的可数紧空间是紧空间。

问题 5.1.2[79] 是否存在第一可数、可分、可数紧的非紧空间？

5.2 伪紧空间的紧性

伪紧空间预先假定满足 Tychonoff 分离公理。熟知伪紧的仿紧空间是紧空间。Scott[80]和 Watson[81]独立地证明了伪紧的亚紧空间是紧空间。

定理 5.2.1[77] [82] σ—亚紧的伪紧空间是紧空间。

定理 5.2.2[83] σ—仿 Lindelöf 的伪紧空间是紧空间。

结合 Watson[84] 构造的非紧、亚 Lindelöf 的伪紧空间说明在覆盖性质中讨论伪紧空间的紧性已告一段落。由于存在伪紧的 Moore 空间是不可度量化的，在广义度量空间中讨论伪紧空间的紧性亦没有什么好的结果，但是伪紧的 K—半层空间是可度量化空间[85]。

问题 5.2.3[79] 在 ZFC 中是否存在非可数紧的伪紧流形？

6 Alexandroff—Arhangel′skii 问题

1961 年 Alexandroff 的空间分类原则，1966 年 Arhangel′skii 为发展 Alexandroff 思想而

提出的用映射研究空间的各类问题，以及由此所形成的相关问题，简称为 Alexandroff－Arhangel'skii 问题。它的形成与发展是对一般拓扑学的重要贡献。

6.1 映射保持空间类

Alexandroff－Arhangel'skii 问题的基本问题之一是确定的空间类被怎样的映射类保持。自1976年来，成绩显著。

定理 6.1.1 完备映射保持下列拓扑性质：中紧性[25]，弱次亚紧性[86]，σ－仿 Lindelöf 性[87]，$\delta\theta$－基[86]，γ－空间[88]，本原基[89]，拟可展[89]，拟可度量[90]，σ－Q 基[91]，严格 P[92]，σ－局部可数基[93]。

定理 6.1.2 具有 Lindelöf 纤维的闭映射保持下列拓扑性质：仿 Lindelöf 性[87]，强 Σ－空间[94]，$\aleph$－空间[95]。

定理 6.1.3 闭映射保持下列拓扑性质：次亚紧性[20]，K－半层[96]。

定理 6.1.4 完备映射不保持下列拓扑性质：可遮[32]，正紧[97]，正基[98]，G_δ－对角线[99]，P－空间[100]，σ－互不相交基[93]，g－可度量性[101]。

值得一提的是 Junnila[102] 证明了仿紧空间的伪开紧像是亚紧空间（解决了 Arhangel'skii[103]的一个问题）。但是下述问题尚未解决。

问题 6.1.5[104] 亚紧空间是某一仿紧空间的开（或伪开）紧像吗？

关于映射保持空间类的详细材料及存在问题可参看作者的综合报告[105]。

6.2 度量空间的映像

Alexandroff—Arhangel'skii 问题的核心是用适当的映射建立度量空间类与确定的拓扑空间类之间的联系。路径之一是以映射类为基础而研究度量空间在这类映射下的特征。我们知道，商映射，开映射，闭映射和完备映射等具有良好的性质，度量空间在这些映射类下的像在六十年代至七十年代已为 Arhangel'skii，Ponomarev，Lašnev 等刻划。近十几年来人们讨论的中心是在映射的纤维上附加条件。

定理 6.2.1[106-107] 下列条件相互等价：

(1) X 是度量空间的商 s－映像。

(2) X 是度量空间的序列覆盖商 s－映像。

(3) X 是具有点可数 cs^*－网的序列空间。

定理 6.2.2[108] 空间 X 是度量空间的商紧映像当且仅当 X 具有点有限的弱展开序列。

寻求度量空间闭像的特征是 Arhangel'skii 提出的一个问题。Lašnev 曾得到它的一个解，但在应用上不方便。Foged 给出了另一个重要的特征。

定理 6.2.3[109] 空间 X 是度量空间的闭像当且仅当 X 是具有 σ－遗传闭包保持 k－网的正则的 Fréchet 空间。

定理 6.2.4[95][110] 空间 X 是度量空间的具有 Lindelöf 纤维的闭映像当且仅当 X 是具有 σ－局部有限 k－网的正则的 Fréchet 空间。

考虑度量空间映像的另一路径是以空间类为基础，定义适当的映射类而把空间类特征为度量空间在这类映射下的像。例如，Michael[94]定义了 σ－局部有限映射以刻划 σ－空间类，林寿[111]定义了 ss－映射以刻划具有局部可数 k－网的空间类等。

问题 6.2.5[93] Fréchet 的半层空间是否可表为半度量空间的闭像？

问题 6.2.6[112] 具有点可数基的正则空间是否属于 $MOBT_3$ 类？Chaber[112]证明了 $MOBI_1$

类中的元特征为具有点可数基的 T_1 空间。

6.3 映射的分解定理

早在 1965 年，Lašner 证明了度量空间的闭像的一个有趣分解性质。

定理 6.3.1[113] 设 X 是度量空间，$f:X\to Y$ 是闭映射，那么$\{y\in Y: f^{-1}(y)$非紧$\}$是 Y 的 σ—闭离散子空间。

有人将上述定理称为值域分解定理或闭映射的分解定理。由于它在度量化理论中产生一定的作用[93]，正日益受到人们的重视，并且讨论了各种类型的分解定理。

定理 6.3.2[114] 设 X 是正规半层空间的拟完备逆像，$f:X\to Y$ 是闭映射，那么$\{y\in Y: f^{-1}(y)$非可数紧$\}$是 Y 的 σ—闭离散子空间。

定理 6.3.3[115] 设 X 是正则 σ—空间，$f:X\to Y$ 是闭映射，那么$\{y\in Y: f^{-1}(y)$非紧$\}$是 Y 的 σ—闭离散子空间。

定理 6.3.4[116] 设 X 是正则强 Σ^*—空间，$f:X\to Y$ 是闭映射，那么$\{y\in Y: f^{-1}(y)$非 Lindelöf$\}$是 Y 的 σ—闭离散子空间。

分解定理的一种加强形式是 1956 年 Morita 得到的。

定理 6.3.5[117] 设 X 是仿紧局部紧空间，$f:X\to Y$ 是闭映射，那么$\{y\in Y: f^{-1}(y)$非紧$\}$是 Y 的闭离散子空间。

定理 6.3.6[118] 设 X 是亚 Lindelöf 的局部 K_ω—空间（局部 Lindelöf 空间），$f:X\to Y$ 是闭映射，那么$\{y\in Y: f^{-1}(y)$非紧（非 Lindelöf）$\}$是 Y 的闭离散子空间。

Chaber[115]列举了关于分解定理存在的一些问题。

7 基、弱基及 k—网

对 Nagata—Smirnov 度量化定理，从局部有限集族或基的角度进行推广，其产物分别是 1961 年 Ceder 定义的 M_i—空间及 g—可度量空间，$\aleph$—空间等。

7.1 Ceder 问题及等价条件

从 M_i—空间的定义知 $M_1\Rightarrow M_2\Rightarrow M_3$，但是是否有 $M_3\Rightarrow M_2\Rightarrow M_1$ 是 Ceder 当时遗留下的问题之一。对这些问题的研究揭开了广义度量空间研究的序幕。1976 年和 1978 年 Gruenhage[7]和 Junnila[119]独立地证明了 $M_3\Rightarrow M_2$。这一成功使人们对于最终解决 Ceder 问题充满信心。十余年之努力虽未完全解决 Ceder 问题，但产生了许多有趣工作。研究 Ceder 问题的路径之一是讨论 M_1—空间自身的性质，其中包括给出 $M_3\Rightarrow M_1$ 的等价条件。让 $\mathscr{P}_1(\mathscr{P}_2)$表示空间的每一点（每一闭子集）具有闭包保持开邻域基的 M_3—空间类。

问题 7.1.1[120] Ceder 问题：

（1） $M_3\Rightarrow M_1$?

（2） M_1 空间类$\subset\mathscr{P}_1$?

（3） M_1 空间类是否闭遗传？

（4） 若 A 是 M_1—空间 X 的闭子集，那么 X/A 是否是 M_1—空间？

定理 7.1.2[121—123] 下列条件相互等价：

（1） $M_3\Rightarrow M_1$。

（2） M_3 空间类$=\mathscr{P}_1$

（3） 每一个 M_3—空间的每一点具有 σ—闭包保持的开邻域基。

(4)　M_1－空间类是闭遗传的。

(5)　M_1－空间类关于完备(或闭)映射封闭。

(6)　$\mathscr{P}_2$ 关于闭子空间封闭。

(7)　$\mathscr{P}_2$ 关于闭映射封闭。

(8)　M_3－空间类＝$\mathscr{P}_2$

定理 7.1.3[121] [124]　下列条件相互等价：

(1)　若 A 是 M_1－空间 X 的闭子集，那么 X/A 是 M_1－空间。

(2)　M_1－空间的每一个闭子集具有(σ－)闭包保持的开邻域基。

(3)　M_1－空间类关于不可约(或拟开)闭映射封闭。

对 Ceder 问题，目前仅得到部分结果。

定理 7.1.4[124—126]　(1)　M_1－空间类关于拟开、可数双商的闭映射封闭。

(2)　遗传 M_1－空间类关于闭映射封闭。

(3)　M_1－空间的不可约(可拟开)闭映像为 M_1－空间当且仅当它的每一点具有 σ－闭包保持的开邻域基。

定理 7.1.5[123]　$\mathscr{P}_1=\mathscr{P}_2\subset M_1$－空间类。

7.2　M_1－空间类的子类

研究 Ceder 问题的另一条路径是讨论怎样的 M_3－空间是 M_1－空间。为此，学者们定义了一系列的空间类：M_0－空间[122]，分层 F_σ－可度量空间[127]，分层 μ－空间[128]，正则分层空间[129]，具有 M－结构的分层空间[130]，具有 σ－几乎局部有限基的空间[131]，CP－可膨胀的 σ－空间[132]，分层 mosaic 空间[133]，具有 σ－有限闭包保持基的空间[134]等。它们之间的关系如下图[135—136]：

度量空间

↙　↓

Lašnev 空间　　分层 F_σ－可度量化空间　　M_0－空间

↓　↓　↓

分层 mosaic 空间＝分层 μ－空间＝具 M－结构的分层空间＝正则分层空间

↓　↓

具有 σ－几乎局部有限基的空间　　M_0－空间的完备像

↘　↙

具有 σ－有限闭包保持基的空间

↓

遗传 M_1－空间

↓

CP－可膨胀的 σ－空间＝每一点具有闭包保持开邻域基的分层空间

↓

M_1－空间

7.3 $\aleph$—空间、g—可度量空间

$\aleph$—空间和g—可度量空间的性质虽不如σ—空间那样引人入胜，但由于在位置上更接近于度量空间，因而有更多的内容可供挖掘。它除了有优美的特征以外，在函数空间的研究上表现出色，而在所具有的覆盖性质方面也是σ—空间所不能比拟的。

定理 7.3.1[137—140] 对正则空间X，下列各条相互等价：

(1) X是$\aleph$—空间。

(2) X具有σ—离散k—网。

(3) X具有σ—遗传闭包保持k—网且任何闭子空间不同胚于S_{w_1}。

(4) X具有σ—离散cs—网。

(5) X具有σ—局部有限cs—网。

(6) X具有σ—遗传闭包保持cs—网。

定理 7.3.2[141] 设$\aleph$—空间X是一个k—空间，那么X是亚 Lindelöf 空间，如果X还是一个正规空间，那么X是仿紧空间。

定理 7.3.3[137] 设X是$\aleph_0$—空间，Y是(仿紧)$\aleph$—空间，那么$C_k(X,Y)$是(仿紧的)$\aleph$—空间。

对于g—可度量空间，也有与$\aleph$—空间相平行的一些特征。

定理 7.3.4[101] [142—143] 下列条件相互等价：

(1) X是g—可度量空间。

(2) X具有σ—离散弱基。

(3) X是具有σ—遗传闭包保持弱基的k—空间。

(4) X是具有σ—遗传闭包保持k—网的gf—可数空间。

问题 7.3.5[143] 具有σ—遗传闭包保持弱基的空间是否是g—可度量空间？

8 函数空间

自 1945 年 Fox 定义了连续实值函数集合上的点态收敛拓扑和紧开拓扑以来的三十年间，关于函数空间拓扑性质的研究只有一些零碎的工作。Arhangel'skii[9]的论文是人们对函数空间进行系统研究的标志。对于一般拓扑学而言，所讨论的中心问题是[144]：寻求拓扑性质P、Q使空间X具有性质P当且仅当$C_p(X)$(或$C_k(x)$)具有性质Q。早期的工作在讨论函数空间的可度量性[145]，广义度量性质[146]及正规性[147]等方面已得出一些很优美的工作。现代的发展主要探讨函数空间上的基数函数，完备性及正规性。为了便于叙述，我们将只列举$C_p(x)$上的一些成果。关于$C_k(x)$上的一些相应工作，读者可见 McCoy 和 Ntantu 的论著[148]。本节所论空间X均满足完全正则分离性公理。

8.1 基数函数及弱第一可数性

基数函数是对一些可数性结果的推广。对于空间Y，$nw(Y)$，$d(Y)$，$hd(Y)$，$ww(Y)$，$\psi(Y)$，$\not\psi(Y)$，$w(Y)$，$t(Y)$，$L(Y)$，$hL(Y)$和$s(Y)$分别表示Y的网络权，稠密度，遗传稠密度，弱权，伪特征，特征，权，紧密度，Lindelöf 数，遗传 Lindelöf 数和展度。

定理 8.1.1[148] 对于空间X，下列基数等式成立：

(1) $nw(C_p(X))=nw(X)$。

(2) $d(C_p(X))=ww(X)$。

(3)　$\psi(C_p(X))=ww(C_p(X))=d(X)$。

(4)　$\not\chi(C_p(X))=w(C_p(X))=|X|$。

(5)　$t(C_p(X))=\sup\{L(X^n):n\in N\}$。

定理 8.1.2[149—151]　对空间 X，下列条件相互等价：

(1)　$C_p(X)$是 k－空间。

(2)　$C_p^w(X)$是强 Fréchet 空间。

(3)　X 的每一开 w－覆盖含有 w－序列。

8.2　完备性

函数空间讨论的完备性主要指：一致完备性，Čech－完备性，Seive－完备性，伪完备性及 Baire 性质。对这几类性质，我们可给出很简单的特征。就一般情况而言，Čech－完备性⇒Sieve－完备性，伪完备性⇒Baire 性质。

定理 8.2.1[152]　对于空间 X，下列条件相互等价：

(1)　$C_p(X)$是完备度量空间。

(2)　$C_p(X)$是 Čech－完备空间。

(3)　$C_p(X)$是 Sieve－完备空间。

(4)　$C_p(X)$是伪完备的 σ－空间。

(5)　X 是可数且离散空间。

定理 8.2.2[153]　对于空间 X，$C_p(X)$是伪完备空间当且仅当 X 的所有可数子集是 X 的 C－嵌入子空间。

定理 8.2.3[154]　对于空间 X，$C_p(X)$是 Baire 空间当且仅当 X 的有限子集的两两互不相交的序列存在强离散的子序列。

定理 8.2.4[148]　对于空间 X，下列条件相互等价：

(1)　$C_p(X)$是一致完备空间。

(2)　$C_p(X)$含有 R^X 的稠 G_δ－子集。

(3)　X 是离散空间。

8.3　正规性与 Lindelöf 性质

函数空间的正规性比积空间的正规性更加困难。目前，大都是在空间 X 附加较强的条件下，得到 $C_p(X)$的部分结果。可以预料这方面仍大有工作可做。

定理 8.3.1[155—156]　对于空间 X，

(1)　$C_p(X)$是仿紧空间当且仅当 $C_p(X)$是 Lindelöf 空间。

(2)　$C_p(X)$是正规空间当且仅当 $C_p(X)$是集态正规空间。

如果设 X 是 Lindelöf Σ－空间，那么

(3)　$C_p(X)$是正规空间当且仅当 $C_p(X)$是 Lindelöf 空间。

函数空间的遗传 Lindelöf 性，遗传可分性之间的关系是耐人寻味的。为了便于叙述，对基数函数 Φ，记 $\Phi^*(X)=\sup\{\Phi(X^n):n\in N\}$。

定理 8.3.2[157—158]　对于空间 X，下列基数等式成立：

(1)　$hd(C_p(X))=hd^*(C_p(X))=hL^*(X)$。

(2)　$hL(C_p^2(X))=hL^*(C_p(X))=hd^*(X)$。

(3)　$s(C_p^2(X))=s^*(C_p(X))=s^*(X)$。

问题 8.3.3[144] [159] 下列基数等式是否成立?

(1) $hL(C_p(X))=hL^*(C_p(X))$

(2) $s(C_p(X))=s^*(C_p(X))$

近来,Coutar…[160]对问题 8.3.3 给出部分答案。

问题 8.3.4[144] 如果 $C_p(X)$是正规(或 Lindelöf)空间,那么 $C_p^2(X)$是正规(或 Lindelöf)空间吗?

9 解决公开问题

我们在前几节列举了这十五年来在覆盖性质与广义度量空间研究上较为活跃的一些方面。如此丰富多彩的工作是伴随着公开问题的解决。解决数学问题一直是推动数学发展的重要源泉。历史把一般拓扑学推上了一条求生的艰辛道路:致力于存在问题的解决。1976 年在美国创刊的"Topology Proceedings"中的问题集,1983 年在日本创刊的"Questions and Answers in General Topology"及近期出版的专著[161]"Open Problems in Topology"都说明了这种趋势。下面列举一些著名问题的解决(或相对解决)的例子作为本文的结束。

9.1 度量化问题

9.1.1 **Alexandroff 问题**[162]:完正规的拓扑流形是否可度量化?Rudin 和 Zenor[163]在(◇)下给予否定,而 Rudin[164]在(MA+TCH)下肯定回答。

9.1.2 **正规 Moore 空间猜测**[165]:正规 Moore 空间可度量化。Nyikos[166]在(PMEA)下肯定回答。

9.1.3 **Katětor 问题**[167]:若 X^2 是遗传正规的紧空间,那么 X 是否可度量化? Nyikos[168]在(MA+TCH)下否定回答。

9.1.4 **Traylor 问题**[169]:正规、局部紧、局部连通的 Moore 空间是否可度量化? Reed 和 Zenor[6]肯定回答。

9.1.5 **Hušek 问题**[170]:具有小对角线的紧空间是否可度量化? 周浩旋[171]在(CH+FA)下肯定回答。

9.2 广义度量空间问题

9.2.1 **γ-空间猜测**[98]:γ-空间是拟度量空间。Fox[172]否定回答。

9.2.2 **$\Sigma^\#$-空间问题**[173]:仿紧 $\Sigma^\#$-空间是否关于可数积封闭? Patsei[174]肯定回答。

9.2.3 **严格 P-空间问题**[93] [175]:严格 p-空间是否是次亚紧空间? 江守礼[92]肯定回答。

9.2.4 **$\omega\Delta$-空间问题**[176]:具有 G_δ-对角线的 $\omega\Delta$-空间是否是可展空间? Alster 等[177]在(CH)下否定回答。

四川大学数学系滕辉博士认真阅读了本文,特此致谢。

参 考 文 献

1 Rudin M E. The normality of products with a compact factor. Gen. Top. Appl. ,1975;5:45~59

2 Rudin M E, Starbird M. Products with a metric factor. Gen. Top. Appl. ,1975;5:235~248

3 Chaber J. Conditions which imply compactness in countably compact spaces. Bull. Acad. Pol. Math. , 1976;24:993~998

4　Wicke H H. Worrell Jr. J M. Point—countability and compactness. Proc. AMS. ,1976;55:427～431

5　Burke D. Engelking R, Lutzer D. Hereditarily closure— preserving collections and metrization. Proc. AMS. ,1976;51:483～488

6　Reed G M, Zenor P L. Metrization of Moore spaces and generalized manifolds. Fund. Math. ,1976;91:203～21[illegible]

7　Gruenhage G. Stratifiable spaces are M_2, Top. Proc. ,1976;1:221～226

8　Telgársky R. Spaces defined by topological games. Fund. Math. ,1975;88:193～223

9　Arhangel'skii A. On some topological spaces that occur in functional analysis. YMH,1976;31(5): 17～32 (Russian)

10　刘应明。一般拓扑学进展。自然科学年鉴(1982),2.1～2.3

11　刘应明,蒋继光。点集拓扑学进展。自然科学年鉴(1989),3.20～3.24

12　Alexandroff P S, Urysohn P. Memoire sur les espaces topologiques compacts。Verh. Nederl. Akad. Wetensch. ,1928;14:1～96

13　Mack J。Directed covers and paracompact spaces。Canad. J. Math. ,1967;19;649～654

14　Sconyers W B. Metacompact spaces and well—ordered open coverings。Notices AMS. ,1970;18:230

15　刘应明。一类包含弱仿紧空间和次仿紧空间的拓扑空间。数学学报,1977;20:212～214

16　龙冰。几个覆盖性质与分离性。数学学报,1986;29:666～669

17　朱俊。拟仿紧和狭义拟仿紧空间的一些性质。数学研究与评论,1984;4(1):9～13

18　Jiang,Jiguang(蒋继光)。A characterization of submetacompactness。Chin. Ann. Math. ,1988;9B:151～155

19　蒋继光。一般拓扑学专题选讲。四川教育出版社,1991

20　Junnila H J K. On submetacompactness。Top. Proc. ,1978;3:375～405

21　Boone J R. A characterization of metacompactness in the class of θ—refinable spaces。Gen. Top. Appl. ,1973;3:253～264

22　Katuta Y Expandability and its geneualizations。Fund. Math. ,1975;87:231～250

23　Junnila H J K. Metacompactness,paracompactness and interior—preserving open covers。Trans. AMS. ,1979;249:373～385

24　Burke D. On subparacompact spaces。Proc. Washington State Univ. Top. Conf. ,1969:39～48

25　Gao Guoshi, Wu Lisheng(高国士,吴利生). Mapping theorems on mesocompact spaces, Proc. AMS. ,1983;89;355～358

26　Mancuso V J. Mesocompactness and related properties。Pacific J. Math. ,1970;33;345～355

27　蒋继光。仿紧性的一个刻画。四川大学学报(自然版),1987;24:256～261

28　蒋继光。仿紧性与性质 b_1。数学学报,1989;32:551～555

29　Nagami K。Σ-spaces, Fund. Math. ,1969;65:169～192

30　H. Teng, J. G. Jiang(滕辉,蒋继光)。Some results about covering prorerties of products。Chin. Ann. Math. ,

31　Yajima Y. Topolgical games and products Ⅱ。Fund. Math. ,1983;117;47～60

32　Burk D。Covering properties。Handbook of Set—Theoretic Topology,North—Holland,1984;347～422

33　Lutzer D。Another property of the Sorgenfrey line。Compositio Math. ,1972;24:359～363

34　江辉有。某些覆盖性质的乘积与刻化。四川大学学报(研究生论文选刊)1991:66～72

35　朱培勇。复盖性质及其乘积。硕士学位论文,四川大学,1992

36　Gruenhage G, Yajima Y。A filterty property of submetacompactness and its application to products。Top. Appl. ,1990;36:43～55

37　Yajima Y. Topological games and products Ⅲ. Fund. Math. ,1983;117:223～238

38 Nyikos P. Order—theoretic base axioms. Surveys in Gen. Top. ,1980:367～398

39 李元穆。乘积空间的广义仿紧性。辽宁师大学报(自然版),1987;2:1～5

40 Pol R, Pol E. Remarks on cartesian products. Fund. Math. ,1976;93:57～69

41 Corson H. Normality in subsets of product spaces. Amer. J. Math. ,1959;81:785～796

42 滕辉。积空间的正规性及相关性质.博士学位论文,四川大学,1990

43 Kombarov A P. On the normality of Σ_m—products. Soviet Math. Dokl. ,1973;14:1050～1053

44 Teng H(滕辉)。On σ—product spaces Ⅰ. Math. Japonica,1991;36:515～522

45 滕辉。σ—积。四川大学学报(自然版),1990;27:409～413

46 Fast S, Smith J C. Sum theorems and σ—products. to appear

47 Chiba K. On σ—products. Math. Japonica,1987;32:373～378

48 Chiba K. On the D—property of σ—products. Math. Japonica,1987;32:5～10

49 Chiba K. Covering properties in products. Math. Japonica,1989;34:693～713

50 Przymusińsky T C. Normatity and paracompactness in finite and countable cartesian products. Fund. Math. ,1980;105:87～104

51 Przymusińsky T C. Products of normal spaces。Handbook of Set—Theoretic Topology,North—Holland, 1984:781～826

52 Morita K. Some problems on normality of products of spaces. Proc. 4th Prague Top. Symp. ,1976:296～297

53 Rudin M E. K—Dowker spaces. Czech. Math. J. ,1978;28:324～326

54 Chiba K, Przymusiński J C, Rudin M E. Normality of product spaces and Morita's conjectures. Top. Appl. ,1986;22:19～32

55 Bešlagic A, Rudin M E. Set—theoretic constructions of nonshrinking open covers. Top. Appl. ,1985;20:167～177

56 Gul'ko S P. On properties of subsets of Σ—products. DAH,1977;237:505～508(Russian)

57 Rudin M E. Σ—Products of metric spaces are normal. 1977,Preprint

58 Rudin M E. The shrinking property. Canad. Math. Bull. ,1983;26:385～388

59 Kombarov A P. On the tightness and normality of Σ—products. DAH,1978;239:775～778(Russian)

60 Yajima Y. On Σ—products of Σ—spaces. Fund. Math. ,1984;123:29～37

61 Yajima Y. On Σ—products of semistratifiable spaces. Top. Appl. ,1987;25:1～11

62 Teng H(滕辉)。On a problem of Y. Yajima. Top. Appl. ,1991;38:39～43

63 滕辉。强 Σ—空间的 Σ—积。科学通报,1990;35:1448～1450

64 Knight C J. Box topologies. Quart. J. Math. ,1964;15:41～54

65 Rudin M E. The box topolgy. Proc. Houston Univ. Top. Conf. ,1971:191～199

66 Van Douwen E K. The box product of countably many metrizable spaces need not be nornal. Fund. Math. ,1975;88:127～132

67 Van Douwen E K. Another nonnormal box product. Gen. Top. Appl. ,1977;7:71～76

68 Roitman J. More paracompact box products. Proc. AMS. ,1979;74:171～176

69 Kunen K. On paracompactness of box products of compact spaces. Trans. AMS. ,1978;240:307～316

70 Lawrence L B. The box product of uncountably many copies of the rationals is consistently paracompact. Trans. AMS.

71 Yang S L(杨守廉),Willames S W. On the countable box product of compactordinals. Top. Proc. ,1987;12:159～171

72 杨守廉。关于紧序数空间可数次箱积的仿紧性。数学学报,1991;34:793～802

73 Williams S W. Box products. Handbook of Set—Theoretic Topology,North— Holland,1984:169～200

74 Vaughan J E. Small uncountable cardinals and topology. Open Problems in Topology, 1990: 195～216
75 Anderson B A. Metric topolgies. Ph. D. Dissertation, Univ. of Iowa, 1964
76 Bennett H R. On quasi－developable spaces. Gen. Top. Appl., 1971; 1: 253～262
77 Uspenskii V V. Pseudocompact spaces with a σ－point finite base are metrizable. Comm. Math. Univ. Carolinae, 1984; 25: 261～264
78 Arhangel'skii A. The star method, new classes of spaces and countable compactness. Soviet Math. Dokl., 1980; 21: 550～554
79 Nyikos P. On first countable, countably compact spaces Ⅲ: The problem of obtaining separable noncompact examples. Open Problems in Topology, 1990: 127～161
80 Scott B M. Pseudocompact, metacompact spaces are compact. Top. Proc., 1979; 4: 577～587
81 Watson W S. Pseudocompact metacompact spaces are compact. Proc. AMS., 1981; 81: 151～152
82 Wang Y M(王燕敏). New characterizations of pseudocompactness. Bull. Austral Math. Soc., 1988; 38: 293～298
83 Burke D, Davis S W. Pseudocompact paralindelof spaces are compact. Abstracts AMS., 1982; 3: 213
84 Watson W S. A pseudocompact metalindelof space which is not compact. Top. Appl., 1985; 20: 237～243
85 吴利生。关于 k－半分层空间。苏州大学学报(自然版), 1983; 1: 1～4
86 Burke D. Perfect images of spaces with a $\delta\theta$－base and weakly $\delta\theta$－refinable spaces. Top. Appl., 1984; 18: 81～87
87 Burke D. Paralindelof spaces and closed mappings. Top. Proc., 1980; 5: 47～57
88 Kofner J. Closed mapping and quasi—metrics. Proc. AMS., 1980; 80: 333～336
89 Burke D. Spaces with a primitive base and perfect mappings. Fund. Math., 1983; 116: 157～163
90 Kofner J. Quasi—metrizable spaces. Pscific J. Math., 1980; 88: 81～89
91 Aull C E. A survey paper on some base axioms. Top. Proc., 1978; 3: 1～36
92 Jiang S L(江守礼)。Every strict p—space is θ－refinable. Top. Proc., 1986; 11: 309～316
93 Burke D. Closed mappings. Surbeys in Gen. Top., Academic Press, 1980: 1～32
94 Michael E. σ—locally finite maps. Proc. AMS., 1971; 65: 159～164
95 Lin S(林寿)。Mapping theorems on $\aleph$－spaces. Top. Appl., 1988; 30: 159～164
96 Gao Z M(高智民)。$\aleph$—space is invariant under perfect mappings。Q and A., 1978; 5: 271～279
97 Burke D. Orthocompactness and perfect mappings. Proc. AMS., 1980; 78: 484～486
98 Lindgren W F, Nyikos P J. Spaces with base satisfying certain order and intersection properties. Pacific J. Math., 1976; 66: 455～476
99 Popov V. A perfect map need not preserved a G_δ－diagonal. Gen. Top. Appl., 1977; 7: 31～33
100 Chaber J. Perfect images of p—spaces. Proc. AMS., 1982; 85: 609～614
101 林寿。关于 g—可度量空间。数学年刊, 1992; 13A(3)
102 Junnila H J K. Paracompactness, metacompactness and semi－open covers. Proc. AMS., 1979; 73: 244～248
103 Arhangel' skii A. The intersection of topologiis, and pseudo—open compact mappings. Soviet Math. Dokl., 1976; 17: 160～163
104 Junnila H J K. Three covering properties. Surveys in Gen. Top., 1980; 195～245
105 林寿。关于空间和映射。苏州大学学报(自然版), 5(1989), 313～326
106 Gruenhage G, Michael E, Tanaka Y. Spaces determined by point—countable covers. Pacific J. Math., 1984; 113: 303～332
107 Tanaka Y. Point—countable covers and k—networks. Top. Proc., 12(1987), 327～349
108 Lin S(林寿)。On the quotient compact images of metric spaces. Advan. Math. (PRC), 1992; 21: 93～96

109 Foged L. A characterization of closed images of metric spaces. Proc. AMS. ,1985;95:487～490

110 Gao Z M(高智民), Hattori Y. A characterization of cloced s—images of metric spaces, Tsukuba J. Math. ,1987;11:367～370

111 Lin S(林寿)。On a generalization of Michael's theorem,Northeastern Math. J. ,1988;4:162～168

112 Chaber J. On the class MOBI。Proc. 6th Prague Top. Symp. ,1986:77～82

113 Lašnev N. Continuous decompositions and closed mappings of metric spaces, DAH. , 1965; 165: 756～758(Russian)

114 Gruenhage G. Generalized metric spaces. Handbook of Set—Theoretic Topology, North—Holland, 1984:423～501

115 Chaber J. Generalizations of Lašnev's theorem。Fund. Math. ,1983;119:85～91

116 Lin S(林寿)。A decomposition theorem for Σ^*—spaces. Top. Proc. ,1991;16

117 Morita K. On cloced mappings. Proc. Japan Acad. ,1956;32:539～543

118 Tanaka Y,Yajima Y. Decompositions for closed maps. Top. Proc. ,1985;10:399～411

119 Junnila H J K. Neighbornets. Pacific J. Math. ,1978;76:83～103

120 Ceder J. Some generalizations of metric spaces. Pacific J. Math. ,1961;11:105～125

121 Borges C,Lutzer D. Characterizations and mappings of M_1—spaces. Lecture Notes in Math. ,No. 375, 1974:34～40

122 Heath R W,Junnila H J K. Stratifiable spaces as subspaces and continuous images of M_1—spaces. Proc. AMS. ,1981;83:146～148

123 Ito M. M_3—spaces whose every point has a closure preserving base are M_1. Top. Appl. ,1985;19:65～69

124 Xia S X(夏省祥)。On irreducible closed images of M_1—spaces。Q and A. ,1990;8:503～508

125 Kao K S(高国士)。A note on M_1—spaces。Pacific J. Math. ,1983;108:121～128

126 Ito M. The closed image of a hereditary M_1—space is M_1. Pacific J. Math. ,1984;113:85～91

127 Gruenhage G. On the $M_3 \Rightarrow M_1$ question. Top. Proc. ,1980;5:77～104

128 Mizokami T. On the dimension of general metric spaces,Ph. D. thsis,Univ. of Tsukuba,1982

129 Tamano K. Stratifiable spaces defined by pair collections,Top. Appl. ,1983;16:287～301

130 Mizokami T. On M—structures,Top. Appl. ,1984;17:63～89

131 Ito M,Tamano K. Spaces whose close images are M_1. Proc. AMS. ,1983;87:159～163

132 Yamada K. M_3—spaces whose every point has a closure—preserbing outer base are CP—expandable. Math. Japonica,1984;29:503～508

133 Tamano K. μ—spaces,stratifiable spaces and mosaical collections. Math. Japonica,1989;34:483～496

134 Ohta H. Well behaved subclasses of M_1—spaces. Top. Appl. ,1989;32:279—288

135 Tamano K. General metric spaces Ⅱ. Topics in Gen. Top. ,1989:367～409

136 高国士。关于 M_1—空间。苏州大学学报(自然版),1988;4:289～300

137 Foged L. Characterizations of $\aleph$—spaces. Pacific J. Math. ,1984;110:59～63

138 Junnila H J K,Yun Z Q (恽自求)。$\aleph$—spaces and spaces with a σ—hereditarily closure—preseving k—network. Proc. Symp. Gen. Top. Appl. Oxford,1989

139 Yun Z Q(恽自求)。A new characterization of $\aleph$—spaces. Top. Proc.

140 林寿。遗传闭包保持集族的若干研究方向。山西师大学报(自然版).

141 Foged L. Normality in k—and—$\aleph$—spaces。Top. Appl. ,1986;22:223～240

142 Foged L. On g—metrizability. Pacific J. Math. ,1982;98:327～332

143 Tanaka Y. σ—hereditarily closure—preserving k—networks and g—metrizability. Proc. AMS. , 1991; 112:283～290

144 Arhangel'skii A. A survey of C_p—theory. Q and A,1987;5:1～109

145 Arens R. A topology of spaces of transformations. Ann. Math. ,1946;47:480～495

146 Michael E. $\aleph_0$—spaces。J. Math. Mech. ,1966;15:983～1002

147 Pol R. Normality in function spaces. Fund. Math. ,1974;84:145～155

148 McCoy R A, Ntantu I. Topological properties of spaces of continuous functims. Lecture Notes in Math. ,No. 1315,1988

149 Pytkeev E G. On sequentiality of spaces of continuous functions. YMH, 1982; 37(5): 197～198 (Russian)

150 Gerlits J. Some properties of C(X), Ⅱ. Top. Appl. ,1983;15:255～262

151 Arhangel'skii A, Tkcauk V. Function spaces and topological invariants. Publication of the Moscov Univ. ,1985(Russian)

152 McCoy R A,Ntantu I. Completeness properties of function spaces. Top. Appl. ,1986;22:191～206

153 Tkacuk V. The spaces $C_p(X)$: decomposition into a countable union of bounded subspaces and completeness prorerties. Top. Appl. ,1986;22:241～253

154 Pytkeev E G. The Baire property of spaces of continuous functions. Math. Zametki,1985;38:726～740 (Russian)

155 Arhangel'skii A. Function spaces with pointwise convergence topology. Part Ⅰ: Gen. Top. , Function spaces and Dimension,1985:3～66(Russian)

156 Reseničeko E. Normality and collectionwise normality of function spaces. BMΓY, 1990; 6: 56～58 (Russian)

157 Veličko V. Weak topology of spaces of continuous functions. Mat. Zametki, 1981; 30: 703～712 (Russian)

158 Zenor P. Hereditary m—separability and the hereditary m—Lindelof property in product spaces and function spaces. Fund. Math. ,1980;106:175～180

159 Arhangel'skii,A. Problem in C_p——theory,Open Problems in Topology,(1990),601～615

160 Coutant B. Some cardinal function relationships between $C_p(X)$ and finite powers of a spsce X. Top. Appl. ,1991;39:245～259

161 Van Mill J,Reed G M. Open Problems in Topology. North—Holland,Amsterdam,1990

162 Alexandroff P S. On local properties of closed sets. Ann. Math. ,1935;26:1～3

163 Rudin M E,Zenor P L. A perfectly normal nonmetrizable manifold. Horston J. Math. , 1976;2:129～134

164 Rudin M E. The undefidability of the existence of a perfectly normal nonmetrizable manifold. Houston J. Math. ,1979;5:249～252

165 Jones F B. Concerning normal and completely normal spaces. Bull. AMS. ,1937;43:671～677

166 Nyikos P J. A provisional solution to the normal Moore space problem. Proc. AMS. ,1980;78:429～435

167 Katětov M. Complete normality of cartesian propucts. Fund. Math. ,1948;35:271～274

168 Nyikos P J. A compact non—metrizable space P such that P^2 is completely normal. Top. Proc. ,1977;2:359～364

169 Traylor D R. On normality, pointwise paracompactness and the metrization question. Proc. Arizona State Univ. Top. Conf. ,1967:286～287

170 Hušek M. Topological spaces with $\aleph$—accessible diagonal, Comm. Math. Univ. Caroliane, 1977; 18: 777～788

171 Zhou H X(周浩旋)。On the small diagonals. Top. Appl. ,1982;13:283～293

172 Fox R. Solution of the γ—space problem. Proc. AMS. ,1982;85:606～608

173 Michael E. On Nagami's Σ—spaces and some related matters. Proc. Washington State Univ. Top.

Conf. ,1969:1～7

174 Patsei I P. The σ—product of strong $\Sigma^{\#}$—spaces, ВМГУ,1984;2:87～89(Russian)

175 Burke D. Spaces with a G_δ—diagonal. Lecture Notes in Math. ,No. 378,1974:95～101

176 Hodel R E. Moore spaces and wΔ—spaces. Pacific J. Math. ,1971:38:641～652

177 Alster K,Burke D,Davis S. The wΔ—spaces problem. Top. Appl. ,1987;30:175～181

Covering Properties and Generalized Metric Spaces, 1976～1991

Lin Shou Zhang Congjun

(Ningde Teachers' College) *(Department of Mathematics)*

Abstract

This paper is devoted to a survey on covering properties and generalized metric spaces from 1976 to 1991, which describes some research directions on this field including China scholar' some works.

Key words: Topological space; Covering property; Generalized metric space