黑龙江大学自然科学学报
第10卷 增刊
1993年6月
JOURNAL OF NATURAL SCIENCE
OF HEILONGJIANG UNIVERSITY
Vol.10 Special
June, 1993

具有点可数型空间的闭映像

林 寿

(福建宁德师专数学系)

摘 要 完备映射不能保持具有点可数型的空间。本文的主要结果是证明有限到一的连续闭映射保持具有点可数型的空间。

关键词 拓扑空间 映射 紧空间

本文所论空间均指满足 T_2 分离性公理的拓扑空间,而映射指连续的满映射。

空间 X 称为具有点可数型的空间[1] (Spaces of pointwise countable type), 如果对于任意的 $x\in X$, 存在 X 中含点 x 的紧子集 K 使 K 在 X 中具有可数特征,即存在 X 中含 K 的开子集列 $\{U_n\}$满足: 若 U 是 X 中含 K 的开子集,则有 $n\in N$ 使 $U_n\subset U$。上述开集列 $\{U_n\}$ 也称为 K 在 X 中的局部外基。

众所周知, 完备映射未必保持具有点可数型的空间[2]。然而,有限到一的闭映射是否保持具有点可数型的空间似乎还是一个尚未解决的问题[3]。本文对此给出肯定的回答。

从具有点可数型的空间的定义易验证引理 1。

引理 1 设空间 X 具有点可数型。如果 F 是 X 的有限子集,那么在 X 中存在含 F 的紧子集 K 使 K 在 X 中具有可数特征。

引理 2 设 $f:X\to Y$。对于 X 的子集 U, 让

$$V=f^{-1}(Y\setminus f(X\setminus U)),$$

那么 $f^{-1}f(V)=V=\{x\in X:\ f^{-1}f(x)\subset U\}\subset U$。

证明 由 V 的定义有

$$f^{-1}f(V)=f^{-1}f(f^{-1}(Y\setminus f(X\setminus U)))=f^{-1}(Y\setminus f(X\setminus U))=V。$$

另一方面, 对于 $x\in X$,

$$x\in f^{-1}(Y\setminus f(X\setminus U))\Longleftrightarrow f(x)\in Y\setminus f(X\setminus U)\Longleftrightarrow f^{-1}f(x)\subset U,$$

所以 $f^{-1}(Y\setminus f(X\setminus U))=\{x\in X:\ f^{-1}f(x)\subset U\}\subset U$。

定理 设 $f:X\to Y$ 是有限到一的闭映射。如果 X 具有点可数型,那么 Y 也具有点

国家自然科学基金资助项目
宁德地区科委资助课题
收稿日期: 1991-06-26

可数型。

证明　对于任意的 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的有限子集。由引理 1，在 X 中存在含 $f^{-1}(y)$ 的紧子集 K 使 K 在 X 中具有可数特征。设 X 中的开子集列 $\{U_n\}$ 是 K 在 X 中的局部外基。令 $V_0=X$。下面由归纳法构造 X 的开子集列 $\{V_n\}$ 满足如下的条件(*)：

$$(*)\begin{cases} V_n\subset V_{n-1}\cap U_n & (1)\\ \overline{V_n\cap K}\subset V_{n-1}\cap K & (2)\\ f^{-1}f(V_n)=V_n & (3)\\ f^{-1}(y)\subset V_n & (4)\end{cases}$$

令

$$V_1=f^{-1}(Y\backslash f(X\backslash U_1))$$

因为 f 是闭映射，V_1 是 X 的开子集。由引理 2, V_1 满足条件(*)。设已构造了 X 的开子集 $V_i(i\leqslant n)$ 满足条件(*)。由于 $f^{-1}(y)\subset V_n\cap K$，并且 K 是 X 的正规的子空间，存在 K 的开子集 W_n 使 $f^{-1}(y)\subset W_n\subset cl_K(W_n)\subset V_n\cap K$, 于是存在 X 的开子集 G_n 使 $W_n=G_n\cap K$。这时有

$$\overline{G_n\cap K}=\overline{W_n}=cl_k(W_n)\subset V_n\cap K,$$

$$f^{-1}(y)\subset G_n\cap U_{n+1}\cap V_n。$$

令

$$V_{n+1}=f^{-1}(Y\backslash f(X\backslash G_n\cap U_{n+1}\cap V_n)),$$

那么 V_{n+1} 是 X 的开子集，并且由引理 2 不难验证 V_{n+1} 也满足条件(*)。综上所述，我们已构造了 X 的开子集列 $\{V_n\}$ 满足条件(*)。

现在，置

$$H=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n,$$

那么

$$\begin{cases} H\text{ 是 }X\text{ 的紧子集且在 }X\text{ 中具有可数特征} & (5)\\ f^{-1}f(H)=H & (6)\\ f^{-1}(y)\subset H & (7)\end{cases}$$

事实上，由(1)知 $H\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$，又因为 $\{U_n\}$ 是 K 在 X 中的局部外基，所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n=K$，于是 $H=\bigcap_{n=1}^{\infty}(V_n\cap K)$。由(2)知 $H=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{V_n\cap K}$，从而 H 是 X 的紧子集。因为 $H=\bigcap_{n=1}^{\infty}(V_n\cap K)$，所以 H 是 K 中的 G_δ 集，而 K 在 X 中具有可数特征，依据[4]命题 41.6 知 H 在 X 中具有可数特征。由 H 的定义及(3)知 $H\subset f^{-1}f(H)=f^{-1}f(\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n)\subset f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty}f(V_n))=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}f(V_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty}V_n=H$。于是 $f^{-1}f(H)=H$。由(4)得 $f^{-1}(y)\subset H$。因而(5)、(6)、(7)成立。

设 H 在 X 中的局部外基是 $\{O_n\}$。对于 $n\in N$, 置

$$P_n=Y\backslash f(X\backslash O_n),$$

那么 P_n 是 Y 的开子集并且 $f(H)\subset P_n\subset f(O_n)$。事实上,由(6)及引理2得 $H=f^{-1}(Y\backslash f(X\backslash H))$, 因为 $H\subset O_n$, 所以 $f(H)=Y\backslash f(X\backslash H)\subset Y\backslash f(X\backslash O_n)=P_n$, 再由引理2得 $f^{-1}(P_n)=O_n$, 从而有 $P_n\subset f(O_n)$, 即 $f(H)\subset P_n\subset f(O_n)$。由(5)及(7)式知 $y\in f(H)$ 并且 $f(H)$ 是 Y 的紧子集。下面证明 Y 的开子集列 $\{P_n\}$ 是 $f(H)$ 在 Y 中的局部外基。设 Q 是 Y 的含 $f(H)$ 的开子集,由(6)得

$$H=f^{-1}f(H)\subset f^{-1}(Q),$$

那么存在 $n\in N$ 使

$$H\subset O_n\subset f^{-1}(Q),$$

于是

$$f(H)\subset P_n\subset f(O_n)\subset ff^{-1}(Q)=Q,$$

所以 $\{P_n\}$ 是 $f(H)$ 在 Y 中的局部外基。故 Y 是具有点可数型的空间。证毕。

利用本文定理及[5]定理4直接得到下述推论。

推论 点可数型性质满足局部有限闭和定理。

参 考 文 献

[1] Архангельский А В. Бцкомпактнце множества и топология пространств. Трудц Моск Мат Общ, 1965; 13:3～55

[2] Lutzer D J. Semimetrizable and Stratifiable spaces. General Topology Applications, 1971; 1:43～48

[3] 林寿. 关于空间和映射. 苏州大学学报(自然版), 1989; 5:313～326

[4] 儿玉之宏, 永见启应著, 方嘉琳译. 拓扑空间论. 北京: 科学出版社, 1984

[5] Arya S P. Singal M. More Sum theorems for topological spaces. Pacific J Math, 1975; 59: 1～7

On Closed Images of Spaces of Pointwise Countable Type

Lin Shou

(Ningde Teacherrs' College)

Abstract Spaces of pointwise countable type are not preserved by perfect mappings. In this paper it is shown that spaces of pointwise countable type are preserved by finite－to －one, continuous, closed mappings.

Kye words Topological spaces, Mapping, Compact space