第7卷第3期　　　苏州大学学报（自然科学）　　　Vol.7 No.3
1991年7月　JOURNAL OF SUZHOU UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)　Jul. 1991

关于M-空间的注记

林 寿
（宁德师范专科学校，352100）

摘　要　$M^{\#}$-空间，$M^{\#}$-空间都是M-空间的推广。本文主要讨论M^*-空间的特征以及$M^{\#}$-空间的映射性质。

关键词　M-空间，M^*-空间，$M^{\#}$-空间，拟完备映射，闭映射。

1980年美国数学会数学主题分类54E18，54C10

M-空间的重要性表现在对积空间的仿紧性，用映射对空间进行分类以及度量化问题等的研究中所产生积极的作用．因此许多学者研究了M-空间的各种推广，如M^*-空间，$M^{\#}$-空间，ωM-空间等．本文的目的是讨论这些空间的一些特征和映射性质．

本文所论空间均指满足T_1分离性公理的拓扑空间．映射指连续的满映射．设$\{\mathscr{G}_i\}$是空间X的覆盖序列，称$\{\mathscr{G}_i\}$满足条件（M_1）〔（M_2）〕，如果$\{K_i\}$是X的非空闭子集的下降集列，并且存在$x\in X$使$K_i\subset st(x,\mathscr{G}_i)$〔$K_i\subset st^2(x,\mathscr{G}_i)$〕，那么$\bigcap\{K_i: i\in N\}\neq\phi$．拓扑空间$X$称为$M$-空间，如果$X$存在开覆盖的正规序列满足条件（$M_1$）．$X$称为$M^*$-空间（$M^{\#}$-空间），如果$X$存在闭的局部有限（闭包保持）的覆盖序列满足条件（$M_1$）．$X$称为$\omega M$-空间，如果$X$存在开覆盖序列满足条件（$M_2$）．有下列关系成立[1]：

$$\begin{tikzcd}
\text{度量空间} \arrow[dr] & & & & \\
& M\text{-空间} \arrow[r] & M^*\text{-空间} \arrow[r] & M^{\#}\text{-空间} \arrow[r] & {} \\
\text{可数紧空间} \arrow[ur] & & & & \\
& q\text{-空间} & & & \\
\omega M\text{-空间} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
& \text{可数仿紧空间} & & &
\end{tikzcd}$$

1　M^*-空间的特征

M-空间的完备象未必还是一个M-空间．M^*-空间的作用表现在它刻划了M-空间的完备象．在许多条件下闭包保持集族可以转化为局部有限集族，因而知道$M^{\#}$-空间是否等价于M^*-空间是有趣的这似乎是一个尚未解决的问题．本节证明若把$M^{\#}$-空间中的闭包保持集族换为遗传闭包保持集族，所产生的空间等价于M^*-空间，

收稿日期：1990—04—19
*国家自然科学基金资助项目。

对于空间X的子集族$\mathscr{G}$，置

$D(\mathscr{G})=\{x\in X:\mathscr{G}$在点$x$不是点有限的$\}$,

$$\mathscr{F}(\mathscr{G})=\{\overline{P\backslash D(\mathscr{G})}:P\in\mathscr{G}\}\cup\{\{x\}:x\in D(\mathscr{G})\}.$$

引理1.1 设X是一个q-空间.如果$\mathscr{G}$是X的遗传闭包保持的闭子集族，那么$\mathscr{F}(\mathscr{G})$是X的局部有限的闭子集族.

证 先证明$D(\mathscr{G})$是X的闭离散子集．若不然，那么存在$D(\mathscr{G})$的子集A使A不是X的闭子集．设$x\in\overline{A}\backslash A$．因为$X$是一个$q$-空间，设$\{W_n\}$是点$x$的一个$q$序列．由于$X$是$T_1$空间，可以选取$A$中不同的点组成的序列$\{x_n\}$使$x_n\in W_n\cap A,n\in N$．序列$\{x_n\}$在$X$中有聚点．设$a$是序列$\{x_n\}$在$X$中的一个聚点．置

$B=\{x_n:n\in N\}\backslash\{a\}$,

那么B不是X的闭子集．另一方面，对于$n\in N$，$x_n\in D(\mathscr{G})$，所以$\mathscr{G}$在点x_n不是点有限的，故存在$\mathscr{G}$的可数子族$\{P_n:n\in N\}$使得每一$x_n\in P_n$．而$\{P_n:n\in N\}$是X的遗传闭包保持集族，于是B是X的闭子集，矛盾．因而$D(\mathscr{G})$是X的闭离散子集．

因为$D(\mathscr{G})$是离散的，又因为$\{\overline{P\backslash D(\mathscr{G})}:P\in\mathscr{G}\}$是闭包保持的，所以为证明$\mathscr{F}(\mathscr{G})$的局部有限性，只须证明$\mathscr{F}(\mathscr{G})$是点有限的集族．若不然，那么存在点$x\in X$和$\mathscr{G}$的可数子族$\{P_n:n\in N\}$使$x\in\cap\{\overline{P_n\backslash D(\mathscr{G})}:n\in N\}$，于是$x\in\cap\{P_n:n\in N\}$，所以$x\in D(\mathscr{G})$，从而$x\in\cap\{\overline{P_n\backslash\{x\}}:n\in N\}$．设$\{V_n\}$是点$x$的一个$q$-序列，即$\{V_n\}$是点$x$的开邻域序列，并且若序列$\{x_n\}$使对于$n\in N$有$x_n\in V_n$，那么序列$\{x_n\}$在$X$中有聚点．于是，对于$n\in N$，$V_n\cap(P_n\backslash\{x\}$是无限集．从而可选取由$X$中互不相同点构成的序列$\{x_n\}$使对于$n\in N$有$x_n\in V_n\cap(P_n\backslash\{x\})$．由于$x_n\in V_n$，所以序列$\{x_n\}$在$X$中有聚点．又由于$x_n\in P_n$，于是集合$\{x_n:n\in N\}$是$X$的闭离散子集．这是一个矛盾．因而$\mathscr{F}(\mathscr{G})$是$X$的局部有限闭子集族．

定理1.2 空间X是一个M^*-空间当且仅当存在X的遗传闭包保持闭覆盖序列满足条件（M_1）．

证 只须证明充分性．设$\{\mathscr{G}_i\}$是X的满足条件（M_1）的遗传闭包保持的闭覆盖序列．由引理1.1,不难验证$\{\mathscr{F}(\mathscr{G}_i)\}$是$X$的满足条件（$M_1$）的局部有限的闭覆盖序列，因而$X$是一个$M^*$-空间．

2 $M^\#$-空间的映射性质

拟完备映射保持M^*-空间以及ωM-空间．对于$M^\#$-空间也有同样的结论成立．

定理2.1 拟完备映射保持$M^\#$-空间．

证 设$f:X\to Y$是一个拟完备映射，其中X是一个$M^\#$-空间．设$\{\mathscr{G}_i\}$是X的满足条件（M_1）的闭包保持的闭覆盖序列．不妨认为$\mathscr{G}_{i+1}$加细$\mathscr{G}_i$．对于$i\in N$，置

$$\mathscr{L}_i=\{f(p):p\in\mathscr{G}_i\},$$

那么$\{\mathscr{L}_i\}$是Y的闭包保持的闭覆盖序列，下面证明它满足条件(M_1)．设存在$y_0\in Y$和

Y的非空下降的闭集列$\{K_i\}$使$K_i \subset st(y_0, \mathscr{Q}_i)$．对于 $i \in N$，置

$$L_i = f^{-1}(K_i) \cap st(f^{-1}(y_0), \mathscr{P}_i)$$

那么$K_i \supset f(L_i) = K_i \cap st(y_0, \mathscr{Q}_i)$，于是$f(L_i) = K_i$．为证明$\cap\{K_i: i \in N\} \neq \phi$，只须证明$\cap\{L_i: i \in N\} \neq \phi$．若不然，设$\cap\{L_i: i \in N\} = \phi$．对于$x \in f^{-1}(y_0)$，如果对任意的 $i \in N$，$L_i \cap st(x, \mathscr{P}_i) \neq \phi$，那么$\{L_i \cap st(x, \mathscr{P}_i)\}$是非空下降的闭集列．由于$\{\mathscr{P}_i\}$满足条件 (M_1)，所以$\cap\{L_i: i \in N\} \supset \cap\{L_i \cap st(x, \mathscr{P}_i): i \in N\} \neq \phi$，矛盾．因而存在$i(x) \in N$使$L_{i(x)} \cap st(x, \mathscr{P}_{i(x)}) = \phi$．置

$W_{i,x} = X \backslash \cup\{P \in \mathscr{P}_i : x \notin P\}$

$V_i = \cup\{W_{i,x} : x \in f^{-1}(y_0)$且$i(x) = i\}$，

那么V_i是X的开子集，并且$f^{-1}(y_0) \subset \cup\{V_i : i \in N\}$．由于$f$是拟完备映射，存在$n \in N$使$f^{-1}(y_0) \subset \cup\{V_i : i \leqslant n\}$．这时$st(f^{-1}(y_0), \mathscr{P}_n) \subset X \backslash L_n$．事实上，对于$Z \in f^{-1}(y_0)$，存在$i \leqslant n$使$Z \in V_i$，于是存在$x \in f^{-1}(y_0)$使$Z \in W_{i,x}$，$i(x) = i$．从$W_{i,x}$的定义知$st(z, \mathscr{P}_i) \subset st(x, \mathscr{P}_i) \subset X \backslash L_i$．于是$st(z, \mathscr{P}_n) \subset X \backslash L_n$，故$st(f^{-1}(y_0), \mathscr{P}_n) \subset X \backslash L_n$．因而$L_n = L_n \cap st(f^{-1}(y_0), \mathscr{P}_n) = \phi$，矛盾．从而$\cap\{L_i : i \in N\} \neq \phi$，所以$\cap\{K_i : i \in N\} \neq \phi$，故$Y$是一个$M^{\#}$-空间．

推论2.2　设$f: X \to Y$是一个闭映射．如果X是一个$M^{\#}$-空间，那么Y是一个$M^{\#}$-空间当且仅当Y是一个q-空间．

证　只须证明充分性．因为Y是一个q-空间，X是一个可数仿紧空间，所以对于$y \in Y$，$B_r f^{-1}(y)$是X的可数紧子空间[2]，于是存在X的闭子空间C使$g = f|C: C \to Y$是拟完备映射．由定理2.1，Y是一个$M^{\#}$-空间．

推论2.3　开闭映射保持$M^{\#}$-空间．

证　因为开映射保持q-空间，然后应用推论2.2知开闭映射保持$M^{\#}$-空间．

注　推论2.2、2.3的结论对于M^{*}-空间，ωM-空间同样适用．

参考文献

1　Morita K. *A survey on the theory of M-spaces*. *Gen Top Appl*, 1971; 1(1): 49—53

2　腾辉，夏省祥，林寿．某些广义可数紧空间的闭映象．数学年刊，1989；10*A*(5)：554—558

A NOTE ON M-SPACES

Lin Shou

(*Ningde Teacher' College, Fujian* 352100)

Abstract: M*-spaces, M#-spaces are all the generalizations of M-spaces. In this paper we give a characterization of M*-spaces and some mapping properties of M#-spaces.

Keywords. M-space, M*-space, M#-space, quasi-perfect map, closed map.

1980 AMS (MOS) Subj. Class.: 54E18, 54C10.

(本文责任编辑：董张维)