关于紧子集是有限集的空间

林 寿

摘要：本文的主要结果是如果 T_1 空间 X 是紧子集是有限集的空间，那么（1）X 具有 σ 遗传闭包保持闭（mod$\mathscr{K}$）网当且仅当 X 是 σ 闭离散空间；（2）X 具有 σ 局部可数闭（mod$\mathscr{K}$）网当且仅当 X 是 σ 局部可数空间。

关键词：（mod$\mathscr{K}$）网，紧空间，遗传闭包保持集族，局部可数集族。

本文讨论紧子集是有限集的空间的一些拓扑性质，主要探讨在怎样的附加条件下这种空间是 σ 闭离散空间或 σ 局部可数空间。由于近年来在研究具有可数闭 k 网或具有 σ 局部有限闭 k 网等重要的广义度量空间类的特征时使用了这种性质[1,2]诱发了我们对于这类空间的兴趣。为了方便起见，称紧子集是具有限集的空间为 CF 空间。

首先讨论 CF 空间与离散空间的关系。由 k 空间的定义[3]易验证下列命题。

命题 1 CF 空间是离散空间当且仅当它是一个 k 空间。

命题 2 X 是 CF 空间当且仅当 X 是离散空间的紧覆盖的连续象。

证 设 X 是 CF 空间。让 M 是集合 X 赋予离散拓扑，那么 M 是离散空间。设 f 是从 M 到 X 上的恒等映射，则 f 是连续映射。由于 X 的紧子集是有限集，所以 f 是紧覆盖映射。

反之，设 X 是离散空间 M 在紧覆盖的连续映射 f 下的象空间。由于 M 的紧子集是有限集，而是紧覆盖映射，所以 X 的所有紧子集是有限集。

其次我们讨论具有特定性质的（mod$\mathscr{K}$）网的 CF 空间的性质。拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的（mod$\mathscr{K}$）网[4]，如果 $\mathscr{K}$ 是由 X 的某些闭紧子集组成的覆盖，并且对于 $K\subset U$，其中 $K\in\mathscr{K}$，U 是 X 的开子集，存在 $P\in\mathscr{P}$ 使 $K\subset P\subset U$。若上述 $\mathscr{P}$ 是由 X 的闭子集所组成，则称 $\mathscr{P}$ 为 X 的闭（mod$\mathscr{K}$）网。我们在文［1］中研究了具有 σ 局部有限闭（mod$\mathscr{K}$）网的 CF 空间的特征。本文讨论它的两种推广，即具有 σ 局部可数（mod$\mathscr{K}$）网的 CF 空间和具有 σ 遗传闭包保持（mod$\mathscr{K}$）网的 CF 空间的特征。

以下所论空间均满足 T_1 分离性分理。

命题 3 CF 空间 X 具有 σ 局部可数（mod$\mathscr{K}$）网当且仅当 X 是 σ 局部可数空间。

证 必要性。设 X 是具有 σ 局部可数（mod$\mathscr{K}$）网的 CF 空间，其中 $\mathscr{K}$ 是由 X 的某些非空紧子集组成的覆盖。让 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 局可数的（mod$\mathscr{K}$）网。不妨设 $\mathscr{P}$ 关于有限交封闭。对于 $K\in\mathscr{K}$，让

$\mathscr{P}(K)=\{P\in\mathscr{P}:K\subset P\}$,

* 国家自然科学基金资助课题，宁德地区科委资助项目。

那么$\mathscr{P}$（K）是可数的。记

$$\mathscr{P}(K) = \{P_i: i\in N\}。$$

对于$n\in N$，置

$$K_n=\bigcap_{i\leqslant n}P_i$$

那么$K\subset K_n\in\mathscr{P}$（K）。我们断言存在$n\in N$使得$K_n$是有限的。事实上，若对于任意的$n\in N$，$K_n$是无限的，因为K是有限的，于是存在X的子集$A=\{x_n: n\in N\}$使得$x_1\in K_1$，$x_{n+1}\in K_{n+1}\setminus\{x_i: i\leqslant n\}$。让$F=K\cup A$。对于F在X中的开覆盖$\mathscr{U}$，存在U的有限子族$\mathscr{U}'$使$K\subset\bigcup\mathscr{U}'$。从而有$P_i\in\mathscr{P}$（K）使$K\subset P_i\subset\bigcup\mathscr{U}'$，于是$K\cup\{x_n: n\geqslant i\}\subset\bigcup u'$。同时存在U的有限子族$\mathscr{U}''$使$\{x_n: n<i\}\subset\bigcup\mathscr{U}''$。因此$\mathscr{U}'\cup\mathscr{U}''$是U的有限子族并且覆盖F。故F是X的一个无限的紧子集。这与X是CF空间相矛盾。

现在，记$\mathscr{P}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$，其中每一$\mathscr{P}_n$是X的局部可数集族。对于$n\in N$，置

$$\mathscr{F}_n = \{P\in\mathscr{P}_n: P\text{是有限的}\}$$

$$= \{\{x_{\alpha,1},\cdots, x_{\alpha,n(\alpha)}\}: \alpha\in A_n\},$$

那么由上所证知$\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$仍是X的σ局部可数的（mod$\mathscr{K}$）网，因而$X=\bigcup_{n\in N}(\bigcup\mathscr{F}_n)$。对于n，$m\in N$置

$$M_{n,m}= \{x_{\alpha,m}: \alpha\in A_n\},$$

那么$M_{n,m}$是X的局部可数子集并且$X=\bigcup_{n,m\in N}M_{n,m}$。故X是σ局部可数空间。

充分性。设CF空间X是σ局部可数空间。让$\mathscr{K}=\{\{x\}: x\in X\}$，$\mathscr{P}=\{\{x\}: x\in X\}$，那么$\mathscr{P}$是X的σ局部可数的（mod$\mathscr{K}$）网。证毕。

拓扑空间$\mathscr{X}$的子集族$\mathscr{P}$称为X的遗传闭包保持集族，如果对于任意的$H(P)\subset P\in\mathscr{P}$有

$$\bigcup\{\overline{H(P)}: P\in\mathscr{P}\} =\overline{\bigcup\{H(P): P\in\mathscr{P}\}}\text{成立。}$$

引理 4[5]如果$\mathscr{P}$是X的遗传闭包保持集族，那么对于$n\in N$，集族

$$\{P_1\cap P_2\cdots\cap P_n: P_i\in\mathscr{P}, i\leqslant n\}$$

也是X的遗传闭包保持集族。

命题 5 CF空间X具有σ遗传闭包保持的闭（mod$\mathscr{K}$）网当且仅当X是σ闭离散空间。

证 只须证明必要性。设$\mathscr{P}$是X的σ遗传闭包保持的闭（mod$\mathscr{K}$）网，其中$\mathscr{K}$是由X的某些闭紧子集组成的覆盖。由引理4，我们可以认为$\mathscr{P}$关于有限交封闭。因为有限个遗传闭包保持集族的并仍是遗传闭包保持集族，如果记$\mathscr{P}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$，其中每一$\mathscr{P}_n$是X的遗传闭包保持集族，那以可以设$x\in\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$。对于$n\in\mathscr{N}$，置

$$D_n= \{x\in X: \mathscr{P}_n\text{在点}x\text{不是点有限的}\}$$

那么D_n是X的σ闭离散子空间。事实上，对于$m\in N$，置

$$E_m= \{x\in X: \bigcap\{P\in\mathscr{P}_m: x\in P\} = \{x\}\},$$

那么由文[6]引理2.5，E_m是X的闭离散子空间。不难验证$D_n\subset\bigcup\{E_m: m\in N\}$（参考文[7]定理2的证明）。因而$D_n$是X的σ闭离散空间。置

$D=\bigcup\{D_n: n\in N\}$，$Y=X\setminus D$，则D是X的σ闭离散空间。下面证明Y也是X的σ闭离散空间。对于$n\in N$，置

$$\mathscr{Q}_n= \{P\cap Y: P\in\mathscr{P}_n\},$$

$\mathscr{Q}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{Q}_n$,

$\mathscr{K}=\{K\cap Y: K\in\mathscr{K}\}$,

那么容易验证 $\mathscr{Q}$ 是 Y 的闭（mod$\mathscr{K}$）网，并且 $\mathscr{K}$ 是由 Y 的某些紧子集组成的 Y 的覆盖。因为 $\mathscr{P}$ 关于有限交封闭，所以 $\mathscr{Q}$ 也关于有限交封闭。又因为闭包保持且点有限的集族是局部有限集族，于是由 Y 的构造知每一 $\mathscr{Q}_n$ 是 Y 的局部有限集族。记 $\mathscr{K}=\{K_\alpha: \alpha\in A\}$。由命题 3 必要性的证明知对于 $\alpha\in A$，存在 $n(\alpha)\in N$ 和 $Q_\alpha\in\mathscr{Q}n(\alpha)$ 使

$$K_\alpha\subset Q_\alpha，Q_\alpha \text{ 是有限集。}$$

对于 $i\in N$，让

$$\mathscr{Q}'_i=\{Q_\alpha: \alpha\in A，n(\alpha)=i\}，$$

那么 $Y=\bigcup\mathscr{K}=\bigcup_{i\in N}(\bigcup\mathscr{Q}'_i)$

可以认为 $\mathscr{Q}''_i$ 是 X 的遗传闭包保持集族（（1）对于不同的 K_α 可能对应相同的 Q_α，由于我们仅要求（*）式成立，于是将重复的 Q_α 删去并不影响（*）式的成立；（2）对于 $\mathscr{Q}'_i$ 中的元可能对应 $\mathscr{P}_i$ 中的不同元，这时只须取定 $\mathscr{P}_i$ 中的一个确定的元与之对应。)，而 $\mathscr{Q}'_i$ 的元又是 X 的有限子集，

因而记

$$\mathscr{Q}'_i=\{F_\alpha: \alpha\in A_i\}$$

$$=\{\{x_{\alpha,1},\cdots,X_{\alpha,i(\alpha)}: \alpha\in A_i\}，$$

$$G_{i,m}=\{x_{\alpha,m}: \alpha\in A_i\}，m\in N，$$

那么 $G_{i,m}$是 X 的渚离散子空间，而 $Y=\bigcup_{i,m\in N}G_{i,m}$，所以 Y 是 X 的 σ 闭离散子空间。故 $X=D\cup Y$ 是 σ 闭离散空间。

命题 5 肯定地回答了文［8］问题 6．6。比较命题 3 和命题 5，下列问题是有趣的。

问题 6 是否存在局部可数的 CF 空间使它不是 σ 闭离散空间？

参 考 文 献

1．Lin Shou（林寿），Astudy of pseudobases，Questions Answers in General Topology，6（1988），81－97.

2．Junnila H，Yun Ziqiu（恽自求），$\aleph$-spaces and spaces with a σ-hereditarily closure-preserving k-network，Proc. Symposium on General Topology and Applications，Oxford，1989.

3．Engelking R，General Topilogy，PWN，1977.

4．Michael E，On Nagami's $\sum$-spaces and some related matters，Proc. Washington State University Conf.，(1969)，1－7.

5．Tanaka Y，Yajima Y，Decompositions for closed maps，Topology Proceedings，10（1985），399－411.

6．Okuyama A，On a generalization of $\sum$-spaces，Pacific J Math，42（1972），485－495，

7．Lin Shou（林寿），Spaces with σ-HCP pseudobases，Northeastern Math J，6（1990），287-290.

8．林寿，遗传闭包保持集族的若干研究方向，山西师大学报（自然科学版），6（1992）(2).17-23

$R_eB_{a_2}C_{u3-x}F_{ex}O_{7-\delta}$系列陶瓷材料的结构与超导电性

刘晓梅

一、引言

自发现Y—B_a—C_u—O系高T_c超导材料后，人们利用X射线衍射、中子衍射、能谱分析、穆斯堡尔效应研究等手段研究该系超导材料的结构，提出了单相超导物质的结构模型。为了弄清氧化物超导体的超导机制，人们又做了许多元素的掺杂和替代工作。本文通过对铁掺杂的系列样品的结构、电性的研究，为研究超导体与非超导体之间的转变提供实验数据，进而为探讨影响超导的主要因素提供实验依据。

二、实验

利用固相反应法合成样品。取分析纯$B_aCO_3C_uO$、$F_{e2}O_3$、$R_{e2}O_3$(R_e=Y、E_u、D_y)为原料在400℃温度下预烧半小时，以除去水份，CO_2和其它杂质。按$R_eB_{a2}C_{u3-x}F_{ex}O_{7-\delta}$(x=0.0，0.2，0.075，0.08，0.085，0.09，0.095，0.10，0.12，0.15，0.17)配比，充分混合后在空气中950℃高温常压下预烧12h，成型后在950℃空气气分中烧结8h，随炉自然退火，其间经充分研磨。

用ZD—3A型X—射线衍射仪对样品的结构进行测定；用标准的四端接线法，银浆焊结电极，测量了样品的电阻随温度的变化曲线。

三、结果与讨论

铁掺杂系列样品的X—射线衍射谱分析表明[1]，R_e为三种不同元素合成的样品$R_eB_{a2}C_{u3-x}F_{ex}O_{T-\delta}$其结构都有随着铁含量的增多从正交相向四方相转变的过程，但从正交相向四方相转变的转变点对应的x是不同的，见表1。

表1 $R_eB_{a_2}C_{u3-x}F_{ex}O_{7-\delta}$系列样品转变点

元素	Y	D_y	E_u
x	0.15	0.10	0.085
a	3.283	3.868	3.900
c	11.71	11.701	11.727
r*	1.019	1.027	1.066

r*为R_e元素在$R_eB_{a2}C_{u3}O_{7-\delta}$结构中的离子半径