高校应用数学学报
2015, 30(4): 485-493

统计序列空间及统计序列商映射

刘 丽[1], 唐忠宝[1], 林 寿[2]

(1. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建漳州 363000;

2. 宁德师范学院 数学系, 福建宁德 352100)

摘 要: 统计收敛性是收敛性的重要推广, 讨论了统计序列空间的性质, 引入了统计序列连续映射、统计序列覆盖映射与统计序列商映射, 探讨了这些映射与非统计意义下相应映射的关系及他们在统计序列空间中的作用, 否定地回答了关于统计序列空间乘积性的一个问题.

关键词: 序列空间; 统计序列空间; 商映射; 统计序列连续映射; 统计序列商映射
中图分类号: O189.1; O211.4
文献标识码: A　　**文章编号**: 1000-4424(2015)04-0485-09

§1 引 言

作为收敛性的拓展, Zygmund[1]提出了统计收敛的思想. Fast[2]和Steinhaus[3]各自独立地引入了实数与复数空间上统计收敛的概念. Connor[4-5], Fridy[6-8], Miller[9]等进一步研究和发展了统计收敛理论. 近年来, Çakalli[10-12], Kostyrko[13], Maio 和Kočinac[14], 程立新等[15]分别探索了拓扑群, 度量空间, 拓扑空间和 Banach 空间中的统计收敛性, 同时研究了统计收敛在选择原理, 函数空间, 多维空间和测度论等方向中的应用. 其后, 唐忠宝和林福财[16]进一步研究了拓扑空间中的统计序列空间与统计 Fréchet-Urysohn空间.

序列空间性质在刻画拓扑空间的收敛性方面起了极其重要的作用[17]. 从映射角度研究序列空间的最主要工具是序列连续映射, 序列覆盖映射与商映射等[18-20]. 为此, 本文在讨论了统计序列空间的进一步性质的基础上, 引入了统计序列连续映射, 统计序列覆盖映射与统计序列商映射, 探讨了这些映射与非统计意义下相应映射的关系及他们在统计序列空间中的作用, 否定地回答了唐忠宝和林福财[16]提出的一个问题.

本文中用$\mathbf{N}$表示全体正整数集, ω与ω_1分别表示第一个无限序数与第一个不可数序数.

定义1.1[21]　设$A\subset \mathbf{N}$, 记$A(n)=\{k\in A: k\le n\}$.

$$\underline{\delta}(A)=\liminf_{n\to\infty}\frac{|A(n)|}{n}\quad 和\quad \overline{\delta}(A)=\limsup_{n\to\infty}\frac{|A(n)|}{n}$$

收稿日期: 2015-04-23　　修回日期: 2015-11-17
通迅作者: 林寿, shoulin60@163.com
基金项目: 国家自然科学基金(11471153; 11201414)

分别称为A 的下渐近密度和上渐近密度. 若$\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A)$, 则$\delta(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|A(n)|}{n}$ 称为A 的渐近密度.

注 (1) 设$A \subset \mathbf{N}$. 若$\delta(A)$ 存在, 则$\delta(\mathbf{N} \setminus A) = 1 - \delta(A)$.

(2) 设$\mathcal{A}$ 是$\mathbf{N}$ 的非空集合组成的集族. 若对任意$A \in \mathcal{A}$, $\delta(A) = 1$, 则对任意$A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, 有$\delta(A_1 \cap A_2) = 1$.

对本文中未给出的一些概念与术语, 读者可从[22]中查阅.

§2 统计序列空间

先回忆序列空间与统计序列空间的概念.

定义2.1[17] 设X 是拓扑空间.

(1) 对于$P \subset X$, P 称为点$x \in X$ 的序列邻域, 若X 中序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 收敛于x, 则$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是终于P 的, 即存在$m \in \mathbf{N}$, 使得$\{x\} \cup \{x_n : n > m\} \subset P$.

(2) 对于$P \subset X$, P 称为X 的序列开集, 若P 是P 中每一点的序列邻域; P 称为X 的序列闭集, 若$X \setminus P$ 是X 的序列开集.

(3) 空间X 称为序列空间, 若X 的每一序列开集是X 的开集.

显然, P 是空间X 的序列闭集当且仅当若由P 中点组成的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 收敛于$x \in X$, 则$x \in P$. 易验证: 第一可数空间是序列空间; 空间X 是序列空间当且仅当X 的每一序列闭集是X 的闭集.

统计序列空间的基础是拓扑空间中的统计收敛性.

定义2.2[14] 拓扑空间X 中的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 称为统计收敛于$x \in X$, 若对点x 的任意邻域U,$\delta(\{n \in \mathbf{N} : x_n \notin U\}) = 0$. 记作$x$=$s$-$\lim x_n$.

显然, 拓扑空间X 中的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 统计收敛于$x \in X$ 当且仅当若U 是x 的任意邻域, 则$\delta(\{n \in \mathbf{N} : x_n \in U\}) = 1$.

定义2.3 设X 是拓扑空间.

(1) 空间X 称为统计序列空间[14], 若对X 的任意非闭子集A, 存在$x \in X \setminus A$ 和A 中序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, 使得$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 统计收敛于x.

(2) 设$A \subset X$. A 称为X 的统计序列闭集[16], 若A中任意序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$统计收敛于$x \in X$, 则$x \in A$; A 称为X 的统计序列开集[16], 若X中任意序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 统计收敛于$x \in A$, 则$|\{n : x_n \in A\}| = \omega$.

虽然统计序列开集与统计序列闭集的定义其形式有别于序列开集与序列闭集的定义方式, 但其本质是一样的, 因为易验证: 空间X 的子集A 是X 的统计序列闭集当且仅当$X \setminus A$ 是X 的统计序列开集[16]. 同时, 有下述结果成立.

引理2.4[16] 对于空间X, 下述条件相互等价:

(1) X是统计序列空间;

(2) X的每个统计序列开集是X 的开集;

(3) X的每个统计序列闭集是X 的闭集.

显然, 空间X的每一开(或闭) 集是X的统计序列开(或统计序列闭)集.

定理2.5 空间X的每一统计序列开(或统计序列闭)集是X的序列开(或序列闭)集.

证　仅证明统计序列闭集的情形, 统计序列开集的情形是类似的. 设F 是空间X 的统计序列闭集. 任取序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset F$, 若$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$收敛于$x$, 则$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$统计收敛于$x$, 因为$F$是$X$的统计序列闭集, 所以$x\in F$, 即$F$ 是X的序列闭集.

由定理2.5 立即导出序列空间是统计序列空间[14,16]. 由于存在非序列空间的统计序列空间[16], 所以拓扑空间的序列开(或序列闭) 集未必是统计序列开(或统计序列闭) 集. 鉴于文[16]尚未发表, 为完备起见, 重新叙述这例.

例2.6[16, 例2.1]　存在不是统计序列闭集的序列闭集.

令$S=\{x_n:n\in\mathbf{N}\}$, 满足若$n\neq m$, 则$x_n\neq x_m$. 取$x_0\notin S$, 置$X=\{x_0\}\cup S$, 在X上定义拓扑如下:

(1) $\forall n\in\mathbf{N}$, x_n是孤立点;

(2) x_0的每个开邻域U 形如$U=\{x_0\}\cup M$, 其中$M\subset S$ 且$\delta(\{n\in\mathbf{N}:x_n\in M\})=1$.
则S 中的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 统计收敛于$x_0\notin S$, 故S 不是统计序列闭集. 另一方面, 由S 中点组成的X 中的收敛序列只能是平凡的序列. 否则, 由于S 中的点均是X 的孤立点, 不妨设存在序列$\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset S$ 收敛于x_0 且当$n\neq m$ 时, $y_n\neq y_m$. 取定$\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 的子序列$\{y_{n^2}\}_{n\in\mathbf{N}}$. 令$V=X\setminus\{y_{n^2}:n\in\mathbf{N}\}$. 由于$\delta(\{k\in\mathbf{N}:y_k\in\{y_{n^2}:n\in\mathbf{N}\}\})=0$, 于是$V$ 是x_0 的开邻域, 从而$\{y_{n^2}\}_{n\in\mathbf{N}}$ 不收敛于x_0, 这与$\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 收敛于x_0 相矛盾. 这表明: S 是X 的序列闭集.

例2.7　存在每一子集都是统计序列闭集的非离散空间.

让X 是任意不可数集, 赋予集合X 可数补拓扑, 即取X 的拓扑

$$\tau=\{\phi\}\cup\{U\subset X:X\setminus U\text{是可数集}\}.$$

显然, X 不是离散空间. 对于$F\subset X$, 若F 不是X 的统计序列闭集, 则存在$x\in X\setminus F$ 及F中统计收敛于x的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, 令$U=X\setminus\{x_n:n\in\mathbf{N}\}$, 则$U$是$x$的开邻域且每一$x_n\notin U$, 这与$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$统计收敛于$x$相矛盾. 这例也说明拓扑空间中的统计序列闭集未必是闭集.

由定义2.3 易见: 空间中一族统计序列闭集的交是统计序列闭集. 显然, 拓扑空间中的闭集(或序列闭集) 关于有限并封闭.

问题2.8　设A,B都是空间X的统计序列闭集, 那么$A\cup B$是否是X的统计序列闭集?

定理2.9　设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\varLambda}$ 是统计序列空间族, 则$\bigoplus_{\alpha\in\varLambda}X_\alpha$是统计序列空间.

证　令$X=\bigoplus_{\alpha\in\varLambda}X_\alpha$. 由引理2.4, 只须证明: 若$F$ 是X 的统计序列闭集,则F 是X 的闭集. 对于每一$\alpha\in\varLambda$, 由于X_α 是X 的闭集, 所以$F\cap X_\alpha$ 是X 的统计序列闭集. 由于$F\cap X_\alpha\subset X_\alpha$, 所以$F\cap X_\alpha$ 是X_α 的统计序列闭集. 又由于X_α 是统计序列空间, 于是$F\cap X_\alpha$ 是X_α 的闭集. 由拓扑和的定义, F 是X 的闭集. 故X 是统计序列空间.

关于统计序列空间的乘积性质, 唐忠宝和林福财[16]提出问题: 两个统计序列空间的乘积空间是否一定是统计序列空间? 下述对这问题给出否定的回答, 见例2.11.

拓扑空间X 称为具有可数tightness[23], 若$A\subset X$且$x\in\overline{A}$, 则存在A的可数子集C, 使得$x\in\overline{C}$. 已知序列空间具有可数tihgtness[23]. 下述定理推广了这一结果.

定理2.10　统计序列空间具有可数tightness.

证　对于空间X 的任意子集A, 记$[A]_\omega=\cup\{\overline{B}:B\text{是}A\text{的可数子集}\}$. 显然, $A\subset[A]_\omega\subset\overline{A}$. 下面证明: $[A]_\omega$是X的统计序列闭集. 任取$[A]_\omega$中的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, 若$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 统计收敛于$x\in$

X, 要证明: $x \in [A]_\omega$. 对任意$n \in \mathbf{N}$, 由于$x_n \in [A]_\omega$, 存在A 的可数子集B_n, 使得$x_n \in \overline{B_n}$. 令$B = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} B_n$, 则$B$是$A$的可数子集且$x_n \in \overline{B}$. 由于$\overline{B}$是统计序列闭集, 所以$x \in \overline{B} \subset [A]_\omega$.

现在, 设X是统计序列空间且$A \subset X$, 则统计序列闭集$[A]_\omega$ 是X 的闭集, 于是$[A]_\omega \subset \overline{A} \subset \overline{[A]_\omega} = [A]_\omega$, 从而$\overline{A} = [A]_\omega$. 如果$x \in \overline{A}$, 则$x \in [A]_\omega$, 于是存在$A$ 的可数子集C 使得$x \in \overline{C}$, 即X 具有可数tightness.

例2.11 两个统计序列空间的积空间不是统计序列空间.

取数直线$\mathbf{R}$ 关于通常拓扑的子空间$S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$. 对每一序数$\alpha < \omega_1$, 让$S_\alpha$ 同胚于S. 记拓扑和空间$\bigoplus_{\alpha<\omega_1} S_\alpha$ 为X. 把X 的全体非孤立点集所成之A 贴成一点所得的商空间X/A 记为S_{ω_1}, 称为扇空间. S_{ω_1} 是序列空间[24], 从而是统计序列空间. 但是积空间$(S_{\omega_1})^2$ 不具有可数tightness[25], 由定理2.10 知$(S_{\omega_1})^2$ 不是统计序列空间.

序列空间的一个基本结论是序列空间是k 空间[23]. 拓扑空间X 称为k空间[22], 若X 的子集F 满足: 对于X 的每一紧子集K, $K \cap F$ 是K 中的闭集, 则F 是X 的闭集. 然而, 统计序列空间未必是k 空间.

例2.12 存在非k 空间的统计序列空间.

验证例2.6 给出的空间$X = \{x_0\} \cup S$ 满足要求. 文[16]已证明了X是统计序列空间. 下面说明X不是k空间. 设K是X的任意紧子集. 因为K 是可数子空间, 所以K具有可数网(network). 由文[24, 定理7.3.13], 具有可数网的T_2的紧空间是可度量化空间, 于是K可度量化, 从而K是序列紧空间. 由于X 中不存在非平凡的收敛序列, 所以K只能是有限集. 即, X 的每一紧子集是有限集. 这时, S与X的每一紧子集K 的交集$S \cap K$ 是K 中的闭集. 如果X是k空间, 则S是X的闭集, 矛盾. 故X不是k空间.

§3 统计序列连续映射

由于序列空间及统计序列空间都涉及序列的收敛性, 所以讨论它们的拓扑性质时, 保持收敛性的映射将发挥积极的作用. 回忆序列连续映射的概念.

定义3.1[26] 设X, Y 是任意拓扑空间, 映射$f : X \to Y$ 称为序列连续映射, 若$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是X 中收敛于x 的序列, 则序列$\{f(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 在Y 中收敛于$f(x)$.

显然, 连续映射是序列连续映射. 易验证: 映射$f : X \to Y$ 是序列连续映射当且仅当若U 是Y 的序列开(序列闭) 集, 则$f^{-1}(U)$ 是X 的序列开(序列闭) 集[26]. 相应于统计收敛性, 文[16]在讨论连续性的等价刻画时使用了"preserves limits of statistical sequence" 性质, 有必要引入下述映射.

定义3.2 设X, Y 是任意拓扑空间, 映射$f : X \to Y$.

(1) f称为保持统计收敛映射, 若$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$是X中统计收敛于x的序列, 则序列$\{f(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 在Y 中统计收敛于$f(x)$.

(2) f称为统计序列连续映射, 若U 是Y 的统计序列开集, 则$f^{-1}(U)$ 是X 的统计序列开集.

显然, 映射$f : X \to Y$ 是统计序列连续映射当且仅当若F是Y的统计序列闭集, 则$f^{-1}(F)$ 是X的统计序列闭集.

定义3.2 中的映射与连续映射之间的基本关系如下.

定理3.3 设映射$f : X \to Y$, 其中X,Y 都是拓扑空间.

(1) 若f 是连续映射, 则f是保持统计收敛映射.

(2) 若f 是保持统计收敛映射, 则f是统计序列连续映射.

证 由文[16]的定理2.2 知(1)成立. 下证(2)亦成立.

设f是保持统计收敛映射. 任取Y的统计序列闭集F, 下证$f^{-1}(F)$ 是X的统计序列闭集. 设$f^{-1}(F)$ 中的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$统计收敛于$x\in X$. 因为f 是保持统计收敛映射, 所以序列$\{f(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ 统计收敛于$f(x)$. 又因为$\{f(x_n)\}_{n\in\mathbf{N}}\subset f(f^{-1}(F))\subset F$,$F$是$Y$的统计序列闭集, 所以$f(x)\in F$, 即$x\in f^{-1}(F)$. 因而$f^{-1}(F)$是$X$的统计序列闭集. 故$f$ 是统计序列连续映射.

问题3.4 统计序列连续映射是否是保持统计收敛映射?

在一定的附加下, 问题3.4 的回答是肯定的.

定理3.5 设映射$f:X\to Y$, 其中X 是统计序列空间, Y是任意拓扑空间. 下述条件相互等价:

(1) f是连续映射;

(2) f是保持统计收敛映射;

(3) f是统计序列连续映射.

证 文[16]的定理2.2 已证明: $(1)\Leftrightarrow(2)$. 由定理3.2 知$(2)\Rightarrow(3)$. 为完成定理证明, 下面证明$(3)\Rightarrow(1)$即可.

设f是统计序列连续映射. 若F是Y的任意闭子集, 则F是Y 的统计序列闭集. 因为f是统计序列连续映射, 所以$f^{-1}(F)$是X 的统计序列闭集, 又因为X是统计序列空间, 则$f^{-1}(F)$是X的闭集. 故f是连续映射.

推论3.6 设映射$f:X\to Y$, 其中X 是序列空间, Y是任意拓扑空间. 下述条件相互等价:

(1) f是连续映射;

(2) f是保持统计收敛映射;

(3) f是统计序列连续映射;

(4) f是序列连续映射.

证 由于序列空间是统计序列空间, 所以由定理3.5, $(1)\Leftrightarrow(2)\Leftrightarrow(3)$. 由文[27]的定理1, $(1)\Leftrightarrow(4)$.

例3.7 存在非连续的保持统计收敛的序列连续映射.

令$X=[0,\omega_1]$, 赋予下述拓扑: X中的点ω_1 具有通常的序拓扑邻域, 其余点是孤立点. 令$Y=X$. 映射$f:X\to Y$定义如下: 当$x=\omega_1$时,$f(x)=0$; 当$x=0$ 时,$f(x)=\omega_1$; 当$x\in X\setminus\{0,\omega_1\}$ 时,$f(x)=x$. 由X上的拓扑, 若$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$是X 中统计收敛于某点$x\in X$的序列, 则$\delta(\{n\in\mathbf{N}:x_n\neq x\})=0$, 即统计收敛序列只能是平凡的, 从而$f:X\to Y$ 是保持统计收敛映射. 因为$\{0\}$是Y中的开集, 但$f^{-1}(0)=\{\omega_1\}$不是X中的开集, 所以f不是连续映射. 此外, 由于X没有非平凡的收敛序列, 从而f是序列连续映射.

例3.8 存在非统计序列连续的序列连续映射.

令$X=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}\cup\{0\}$.$X$ 上拓扑定义如下:

(1) 每个$\frac{1}{n}$是孤立点;

(2) 0的开邻域U形如$U=\{0\}\cup M$, 其中$M\subset\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}$,$\delta(\{n\in\mathbf{N}:\frac{1}{n}\in M\})=1$.

ω赋予离散拓扑.

映射$f:X\to\omega$定义如下: 若$x=0$,$f(x)=0$; 若$x=\frac{1}{n}$,$f(x)=n$.

由例2.6知X中没有非平凡的收敛序列, 从而f是序列连续映射.

f不是统计序列连续映射. 事实上, 因为ω中无非平凡的统计收敛序列, 所以$\mathbf{N}$是ω的统计序列闭集. $f^{-1}(\mathbf{N})=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}$. 由$X$上的拓扑定义知序列$\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbf{N}}$在$X$中统计收敛于$0\notin\{\frac{1}{n}:n\in\mathbf{N}\}$, 故$f^{-1}(\mathbf{N})$不是$X$的统计序列闭集, 从而$f:X\to\omega$不是统计序列连续映射.

问题3.9 保持统计收敛映射是否是序列连续映射?

§4 统计序列商映射

研究序列空间最强有力的映射是商映射[23]与序列商映射[26].

定义4.1 设X,Y是任意拓扑空间, $f:X\to Y$是满映射.

(1) f称为商映射, 若$f^{-1}(U)$是X的开集, 则U是Y的开集.

(2) f称为序列商映射[26], 若$f^{-1}(U)$是X的序列开集, 则U是Y的序列开集.

(3) f称为序列覆盖映射[19], 若$\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$是Y中收敛于$y\in Y$的序列, 则存在X中收敛于某$x\in f^{-1}(y)$的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, 使得$x_n\in f^{-1}(y_n),\forall n\in\mathbf{N}$.

提醒读者注意: 通常商映射均假设映射的连续性[22], 即上述(1)的条件叙述为: 若$f^{-1}(U)$是X的开集当且仅当U是Y的开集. 由于本文在上节及本节中讨论的一些映射未必要求连续, 为讨论商映射与相关映射之间更精确的关系, 定义4.1中的商映射并未预先假设连续性. 因而, 连续的商映射就是通常的商映射. 如果Y是离散空间, 则对于任意拓扑空间X及满映射$f:X\to Y$, f 是商映射, 序列商映射及序列覆盖映射.

本文引入定义4.1中(2)与(3)所定义映射的统计形式.

定义4.2 设X, Y是任意拓扑空间, $f:X\to Y$是满射.

(1) f称为统计序列商映射, 若$f^{-1}(U)$是X的统计序列开集, 则U是Y的统计序列开集.

(2) f称为统计序列覆盖映射, 若$\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$是Y 中统计收敛于$y\in Y$的序列, 则存在X中统计收敛于某$x\in f^{-1}(y)$ 的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, 使得$x_n\in f^{-1}(y_n),\forall n\in\mathbf{N}$.

序列覆盖是序列商映射[26]. 对于统计形式的序列覆盖映射, 有相应的结果成立.

定理4.3 设X,Y是任意拓扑空间. 若$f:X\to Y$是统计序列覆盖映射, 则f是统计序列商映射.

证 任取Y中非统计序列闭集H, 则存在$\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset H$, 使得$\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$统计收敛于$y\notin H$, 由于$f:X\to Y$是统计序列覆盖映射, 所以存在$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset X$, 满足$x_n\in f^{-1}(y_n)$及$x\in f^{-1}(y)$, 使得$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$统计收敛于$x$, 而$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subset f^{-1}(H)$,$x\notin f^{-1}(H)$, 所以$f^{-1}(H)$不是统计序列闭集. 从而$f$是统计序列商映射.

下述定理给出了商映射与统计序列商映射之间的转换关系.

定理4.4 设X,Y是任意拓扑空间, $f:X\to Y$是满映射.

(1) 若X是统计序列空间且f是商映射, 则f是统计序列商映射.

(2) 若Y是统计序列空间且f是统计序列商映射, 则f是商映射.

证 (1) 设X是统计序列空间且f是商映射. 任取$U\subset Y$, 满足$f^{-1}(U)$是X的统计序列开集, 由于X 是统计序列空间, 故$f^{-1}(U)$是X的开集, 又因为f是商映射, 所以U 是Y中的开集, 从而U是Y的统计序列开集. 故f是统计序列商映射.

(2) 设Y是统计序列空间且f是统计序列商映射. 若$f^{-1}(U)$是X 的开集, 则$f^{-1}(U)$是X的统计序列开集, 由于f是统计序列商映射, 故U是Y的统计序列开集, 又因为Y是统计序列空间, 所以U是Y 的开集. 故f是商映射.

推论4.5　设X是统计序列空间, Y是任意拓扑空间. 若$f: X \to Y$是统计序列连续映射, 则f是商映射当且仅当f是统计序列商映射且Y是统计序列空间.

证　文[16]的定理2.4本质上已证明了统计序列连续的商映射保持统计序列空间, 其余结论来自定理4.4.

上述两结果说明了在统计序列空间条件下, 商映射与统计序列商映射的关系. 另一方面, 也可以通过商映射与统计序列商映射来刻画统计序列空间.

定理4.6　拓扑空间X 是统计序列空间当且仅当对任意拓扑空间Y, 若$f: X \to Y$ 是连续的商映射, 则f是统计序列商映射.

证　由定理4.4(1)得必要性. 下面证明充分性.

若X不是统计序列空间, 则存在X的统计序列闭集H, 使得H不是X的闭集. 令$Y = \{0,1\}$, 定义映射$f: X \to Y$如下: 当$x \in H$ 时, $f(x) = 0$; 当$x \in X \setminus H$时,$f(x) = 1$.Y 上的拓扑是由映射f诱导的商拓扑, 即对于$U \subset Y$, U是Y 的开集当且仅当$f^{-1}(U)$是X的开集. 这时, $f: X \to Y$ 是连续的商映射. 因为$f^{-1}(\{1\}) = X \setminus H$不是$X$的开集, 所以$\{1\}$不是$Y$的开集, 从而常值序列$\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, 其中每一$y_n = 0$, 统计收敛于1, 所以$\{0\}$不是$Y$的统计序列闭集. 但$f^{-1}(\{0\}) = H$是$X$的统计序列闭集, 从而$f$不是统计序列商映射.

本节最后给出例子说明相关映射之间的不蕴含关系.

定理4.3的逆命题不成立.

例4.7　存在既不是序列覆盖也不是统计序列覆盖的连续的统计序列商映射.

设非平凡的序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 分别收敛于不同的点x, y. 令$S_1 = \{x_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{x\}$, $S_2 = \{y_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{y\}$, 且$X = S_1 \oplus S_2$. 取定$z$不同于$x$与$y$. 令$Z = (X \setminus \{x, y\}) \cup \{z\}$, 赋予$Z$为把$\{x, y\}$ 贴成点z所成的商空间, 让$f: X \to Z$为自然商映射. 则f连续. 因为X是第一可数空间, 所以X是序列空间, 从而X是统计序列空间. 由定理4.4 知f是统计序列商映射.

取$\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset Z$, 满足$z_{2k-1} = x_k$, $z_{2k} = y_k$, $\forall k \in \mathbf{N}$. 在Z 中序列$\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$收敛于z, 当然也统计收敛于z. 若f是统计序列覆盖映射, 因为每一$f^{-1}(z_n) = \{z_n\}$, 则存在$a \in f^{-1}(z) = \{x, y\}$, 使得$X$中的序列$\{z_n\}$统计收敛于$a$. 不妨设$a = x$, 则$S_1$是$a$在$X$中的邻域且$\delta(\{n \in \mathbf{N} : z_n \in S_1\}) = 1/2$, 这与序列$\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 统计收敛于z相矛盾. 故f不是统计序列覆盖映射. 上述论证也说明f 不是序列覆盖映射.

下述两个例子分别说明定理4.4 中附加统计序列空间的条件不可省略.

例4.8　存在不是统计序列商的连续的商映射.

让X是例3.7 中的拓扑空间$X = [0, \omega_1]$. 令$Y = \{0, 1\}$, 赋予下述拓扑$\{\varnothing, \{0\}, Y\}$. 映射$f: X \to Y$ 定义如下: $f([0, \omega_1)) = \{0\}$, $f(\omega_1) = 1$. 则f 是连续的商映射. 但是, f不是统计序列商映射. 事实上, 因为$f^{-1}(0)$ 是X的统计序列闭集, 而在Y中常值列: $0, 0, 0, \cdots$, 统计收敛于1, 从而$\{0\}$不是Y的统计序列闭集, 所以f不是统计序列商映射.

例4.9　存在不是商的连续的统计序列覆盖映射.

让X是例3.7 中的拓扑空间X. 再让Z是集$[0, \omega_1]$ 赋予离散拓扑, 令$g: Z \to X$是恒等映射. 显然, g是连续映射, 但不是商映射. 否则, 由于Z是离散空间, 则X具有离散拓扑, 矛盾. 由

于X中的统计收敛序列都是平凡的, 所以g是统计序列覆盖映射. 由定理4.3, g也是统计序列商映射.

例4.10 存在不是统计序列商的连续的序列覆盖映射.

让$X=\{x_0\}\cup S$是例2.6给出的拓扑空间. 再让Z是集X 赋予离散拓扑, 令$h:Z\to X$是恒等映射. 显然, h是连续映射. 由例2.6 知X中没有非平凡的收敛序列, 于是h是序列覆盖映射. 但h 不是统计序列商映射. 事实上, 因为$h^{-1}(S)$是Z的闭集, 从而也是Z 的统计序列闭集, 但S不是X的统计序列闭集, 所以h不是统计序列商映射.

问题4.11 连续的统计序列覆盖映射是否是序列商映射?

作者近来已发现问题4.11 的回答是否定的, 其结果将另文发表.

文[18]的例3.4.7, 给出了非序列商的连续商映射(例3.4.7(9)), 非商的连续的序列覆盖映射(例3.4.7(10)), 非序列覆盖的商, 序列商映射(例3.4.7(1)).

致谢 林福财副教授参与了统计序列收敛课题的讨论, 提出了有价值的建议. 特此致谢!

参考文献:

[1] Zygmund A. Trigonometric Series, 2nd ed[M]. Cambridge Univ Press, 1959.

[2] Fast H. Sur la convergence statistique[J]. Colloq Math, 1951, 2: 241–244.

[3] Steinhaus H. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique[J]. Colloq Math, 1951, 2: 73–74.

[4] Connor J. The statistical and strong p-Cesáro convergence of sequences[J]. Analysis, 1988, 8: 47–63.

[5] Connor J. R-type summability methods, Cauchy criteria, P-sets and statistical convergence[J]. Proc Amer Math Soc, 1992, 115: 319–327.

[6] Fridy J A. On statistical convergence[J]. Analysis, 1985, 5: 301–313.

[7] Fridy J A. Statistical limit points[J]. Proc Amer Math Soc, 1993, 118: 1187–1192.

[8] Fridy J A, Khan M K. Tauberian theorems via statistical convergence[J]. J Math Anal Appl, 1998, 228: 73–95.

[9] Miller H I. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence[J]. Trans Amer Math Soc, 1995, 347: 1811–1819.

[10] Çakalli H. Lacunary statistical convergence in topological groups[J]. Indian J Pure Appl Math, 1995, 26(2): 113-119.

[11] Çakalli H. On statistical convergence in topological groups[J]. Pure Appl Math Sci, 1996, 43(1-2): 27-31.

[12] Çakalli H. A study on statistical convergence[J]. Funct Anal Approx Comput, 2009, 1(2): 19-24.

[13] Kostyrko P, Macaj M, Salát T and Strauch O. On statistical limit points[J]. Proc Amer Math Soc, 2000, 129: 2647–2654.

[14] Di Miao G, Kočinac Lj D R. Statistical convergence in topology[J]. Topology Appl, 2008, 156(1): 28-45.

[15] 程立新, 蓝永艺, 林国琛等. 统计收敛的测度理论[J]. 中国科学A辑, 2008, 38(4): 450-468.

[16] Tang Zhangbao, Lin Fucai. Statistical versions of sequential and Fréchet-Urysohn spaces[J]. Adv Math(China), 2015, 44: doi: 11845/sxjz.2014031b.

[17] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice[J]. Fund Math, 1965, 57(1): 107-115.

[18] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[19] Siwiec F. Sequence-covering and countably bi-quotient mappings[J]. General Topology Appl, 1971, 1: 143-154.

[20] 沈荣鑫. 拟第一可数空间和弱拟第一可数空间[J]. 高校应用数学学报, 2010, 25(2): 224-228.

[21] Niven I, Zuckerman H S and Montgomery H L. An Introduction to the Theory of Numbers, 4th ed[M]. New York: John Wiley, 1980.

[22] Engelking R. General Topology(revised and completed edition)[M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[23] Michael A E. A quintuple quotient quest[J]. General Topology Appl, 1972, 2: 91-138.

[24] 高国士. 拓扑空间论, 第二版[M]. 北京: 科学出版社, 2008, 73-89.

[25] Gruenhage G, Tanaka Y. Products of k-spaces and spaces of countable tightness[J]. Trans Amer Math Soc, 1982, 273: 299–308.

[26] Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient mappings[J]. Czech Math J, 1976, 26: 174-182.

[27] 严力. 具有Heine 性质空间的刻划[J]. 漳州师范学院学报(自然科学版), 2003(4): 6-8.

Statistically sequential spaces and statistically sequentially quotient mappings

LIU Li[1], TANG Zhong-bao[1], LIN Shou[2]

(1. School of Math. Statis., Minnan Normal Univ., Zhangzhou 363000, China;

2. Depart. of Math., Ningde Normal Univ., Ningde 352100, China)

Abstract: Statistical convergence is an important extension of usual convergence. In this paper, the properties of statistically sequential spaces are studied. After introducing the concepts of statistically sequentially continuous mappings, statistically sequence-covering mappings and statistically sequentially quotient mappings, the relationship among the new or old mappings and their effects in statistically sequential spaces are discussed. Also a negative answer is given to a problem about the products of statistically sequential spaces.

Keywords: sequential spaces; statistically sequential spaces; quotient mappings; statistically sequentially continuous mappings; statistically sequentially quotient mappings

MR Subject Classification: 54A20; 54C08; 54B15; 54D55; 40A05; 40A30