第41卷第1期 数 学 进 展 Vol.41, No.1
2012年2月 ADVANCES IN MATHEMATICS Feb., 2012

k 半层空间的性质及相关问题

林 寿

(1. 漳州师范学院数学与信息科学系, 漳州, 福建, 363000; 2. 宁德师范学院数学研究所, 宁德, 福建, 352100)

摘要: k 半层空间是层空间与 $\aleph$ 空间的共同推广. 本文综述 k 半层空间的研究进展, 介绍 k 半层空间的刻画、性质及其推广, 给出一些相关问题, 供进一步研究.

关键词: k 半层空间; g 函数; 覆盖性质; 映射性质; 广义可数紧空间
MR(2000) 主题分类: 54E99 / **中图分类号:** O189.1
文献标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2012)01-0001-06

1971 年, Lutzer[1] 定义了 k 半层空间, 解决了怎样的半度量空间是层空间的问题, 初步显示了 k 半层空间的作用. 由于 k 半层空间是层空间与 $\aleph$ 空间的共同推广, 而 σ 空间性质又与 k 半层空间性质差异较大, 所以 k 半层空间常被认为是由 k 网 (k-network) 性质与由网 (network) 性质定义的空间之分界, 因而对其性质的深入研究在一般拓扑学中具有重要的理论价值. 近年来, 关于 k 半层空间的覆盖性质、映射性质、函数插入性质等有了较深刻的进展, 同时所衍生的广义可数紧性质又引起了不少同行的关注, 但推进空间发展的一些老问题依然存在. 对这些问题的研究是丰富、完善广义度量空间理论的有效途径.

1 k 半层空间的刻画

本文所讨论空间若未特别说明都是满足正则且 T_1 分离性质的拓扑空间, τ 为空间的拓扑, τ^c 为空间的全体闭集族, 映射是连续的满函数. $\mathbb{N}$ 是全体自然数集. 一些未定义的概念参考文献 [2] 或 [3].

k 半层空间是层空间理论发展的结果.

1966 年, Borges[4] 发表了关于层空间的著名论文. 空间 X 称为层空间 (stratifiable space), 如果存在函数 $F:\mathbb{N}\times\tau\to\tau^c$ 满足: (a) $\forall\, U\in\tau$, 有 $U=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F(n,U)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F(n,U)^\circ$; (b) 若 $U\subset V\in\tau$, 则 $F(n,U)\subset F(n,V)$.

1970 年, Creede[5] 引入了半层空间. 空间 X 称为半层空间 (semi-stratifiable space), 如果存在函数 $F:\mathbb{N}\times\tau\to\tau^c$ 满足: (a) $\forall\, U\in\tau$, 有 $U=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F(n,U)$; (b) 若 $U\subset V\in\tau$, 则 $F(n,U)\subset F(n,V)$.

1971 年, Lutzer[1] 定义了 k 半层空间. 空间 X 称为 k 半层空间 (k-semi-stratifiable space), 如果存在函数 $F:\mathbb{N}\times\tau\to\tau^c$ 满足半层空间的条件以及: (c) 对于 X 的紧子集 $K\subset U\in\tau$, 存在 $m\in\mathbb{N}$, 使得 $K\subset F(m,U)$.

上述 F 均可设关于 $n\in\mathbb{N}$ 是单调增加的. 显然, 层空间 $\Rightarrow$ k 半层空间 $\Rightarrow$ 半层空间 $\Rightarrow$ perfect, 次仿紧, G_δ 对角线 (一些相关定义及证明可参考文献 [3]).

回忆 g 函数的概念. 函数 $g:\mathbb{N}\times X\to\tau$ 称为空间 X 上的 g 函数 (g-function)[6], 如果 $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $x\in X$, 有 $x\in g(n+1,x)\subset g(n,x)$.

g 函数是刻画广义度量空间的基本工具. k 半层空间的 g 函数刻画如下.

收稿日期: 2010-07-12. 修改稿收到日期: 2011-09-10.
基金项目: 国家自然科学基金 (No. 10971185, No. 11171162) 和福建省自然科学基金 (No. 2009J01013).
E-mail: shoulin60@163.com

定理 1.1 下述条件相互等价:

(1) X 是 k 半层空间;

(2) $\exists\, g$ 函数满足: $x_n \in g(n, y_n)$ 且 $x_n \to p \in X$, 则 $y_n \to p$ (见 [7, 8]);

(3) $\exists\, g$ 函数满足: 若紧集 $K \subset X$ 使得 $K \cap g(n, y_n) \neq \emptyset$, 则 $\{y_n\}$ 有子序列收敛于 K 中的点[9];

(4) (对偶形式) 存在函数 $G: \mathbb{N} \times \tau^c \to \tau$ 满足: (a) $\forall\, F \in \tau^c$, 有 $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(n, F)$; (b) 若 $F \subset L \in \tau^c$, 则 $G(n, F) \subset G(n, L)$; (c) 若 X 的紧集 K 满足 $K \cap F = \emptyset$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $K \cap G(m, F) = \emptyset$ (见 [1]).

k 半层空间的第二类刻画是似基性质.

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族.

1966 年, Michael[10] 定义了伪基. $\mathcal{P}$ 称为 X 的伪基 (pseudo-base), 若紧集 $K \subset U \in \tau$, 则 $\exists\, P \in \mathcal{P}$, 使得 $K \subset P \subset U$.

1971 年, O'Meara[11] 定义了 k 网. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k 网 (k-network), 若紧集 $K \subset U \in \tau$, 则 $\exists\, \mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{P}'$, 使得 $K \subset \cup\mathcal{P}' \subset U$.

1994 年, 林寿和 Tanaka[12] 定义了 wcs^* 网. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 wcs^* 网 (wcs^*-network), 若序列 $x_n \to x \in U \in \tau$, 则存在子序列 $\{x_{n_i}\}$ 和 $P \in \mathcal{P}$, 使得 $\{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\} \subset P \subset U$.

显然, 伪基 $\Rightarrow k$ 网 $\Rightarrow wcs^*$ 网.

空间 X 的序对族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的伪基 (pair-pseudo-base), 若紧集 $K \subset U \in \tau$, 则 $\exists\, (P_1, P_2) \in \mathcal{P}$, 使得 $K \subset P_1 \subset P_2 \subset U$.

上述序对族 $\mathcal{P}$ 可附加要求: $\forall\, (P_1, P_2) \in \mathcal{P}$, 有 $P_1 \subset P_2$. 类似地, 可定义序对族 k 网 (pair-k-network) 和序对族 wcs^* 网 (pair-wcs^*-network) 等概念.

空间 X 的序对族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的垫状 (cushion), 若 $\forall\, \mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, 有

$$\overline{\cup\{P_1 : (P_1, P_2) \in \mathcal{P}'\}} \subset \cup\{P_2 : (P_1, P_2) \in \mathcal{P}'\}.$$

k 半层空间的垫状类刻画如下.

定理 1.2 下述条件相互等价:

(1) X 是 k 半层空间;

(2) X 具有 σ 垫状伪基[3];

(3) X 具有 σ 垫状 k 网[13];

(4) X 具有 σ 垫状 wcs^* 网[3].

几个相关的广义度量空间类[3]: 层空间 $\Rightarrow \sigma$ 闭包保持 k 网 $\Rightarrow k$ 半层空间 $\Rightarrow \sigma$ 空间. 已知[3]: σ 空间 $\not\Rightarrow k$ 半层空间; σ 闭包保持 k 网 $\not\Rightarrow$ 层空间.

问题 1.3[13] k 半层空间是否具有 σ 闭包保持 k 网?

本节最后介绍 k 半层空间的函数插入刻画. 对于空间 X, 记 $\mathrm{LSC}(X)$ 为 X 上全体实值下半连续函数的集, $\mathrm{UKL}(X)$ 为 X 上全体实值 K 上半连续函数的集, 其中 X 上的实值函数 f 称为 K 上半连续的, 如果对 X 的每一紧子集 K, f 在 K 上取得最大值.

定理 1.4[14] 空间 X 是 k 半层空间当且仅当存在保序映射 $\varphi: \mathrm{LSC}(X) \to \mathrm{UKL}(X)$, 使得对每一 $h \in \mathrm{LSC}(X)$, 有 $0 \le \varphi(h) \le h$, 且当 $h(x) > 0$ 时有 $0 < \varphi(h)(x) < h(x)$.

k 半层空间还有一些其他类型的函数插入定理[15].

2 k 半层空间的性质

层空间具有良好的性质[4]. 例如, 层空间是单调正规的遗传仿紧空间, 闭映射保持层空间性质等. 本节主要介绍 k 半层空间的覆盖性质与映射性质.

定理 2.1[8, 16] k 半层的 Fréchet 空间是层空间.

Mizokami 和 Shimane[17] 证明了每一个层的 k 空间是 M_1 空间，即具有 σ 闭包保持基的正则空间，所以每一个 k 半层的 Fréchet 空间是 M_1 空间. 度量空间的闭映像是 M_1 空间且具有点可数的 k 网 [3]. Sakai[18] 给出一个具有点可数 k 网的 Fréchet 的层空间使其不是度量空间的闭映像，否定了刘川和 Tanaka[19] 提出的关于 k 半层空间的一个问题.

定理 2.2[20] k 半层的 k 空间是遗传 metalindelöf 空间.

k 半层空间未必是 metalindelöf 空间 [3]. Foged[21] 已构造例子说明：k 半层的 k 空间未必是正规空间.

定理 2.3[20] k 半层的正规的 k 空间是遗传仿紧空间.

在集论公理 MA+¬CH 假设下，存在非仿紧的 k 半层的正规空间 [22].

Henry[23] 证明了层空间的伪开、紧映像是半层空间. 这结果也适用于 k 半层空间.

定理 2.4 (1) k 半层空间的伪开、紧映像是半层空间 [3].

(2) k 半层空间的开、紧映像是 σ 空间 [24].

度量空间的有限到一、开映像未必是 k 半层空间 [3]. 作者曾证明：k 半层空间的伪开、紧映像是 σ 空间 [25]. 但是，证明中有一个错误，其结论是否成立还是一个问题.

定理 2.5 (1) k 半层空间上的闭映射是紧覆盖映射 [24].

(2) 闭映射保持 k 半层空间性质 [26].

定理 2.6[27] 设 $f: X \to Y$ 是闭映射，其中 X 是 k 半层空间，Y 是 k 空间. 若 Y 不含闭子空间同胚于 S_ω (S_{ω_1})，则 f 是边缘紧映射 (边缘 s 映射)，即对于每一 $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ 是紧的 (可分的).

上述定理推广了恽自求 [28], 刘川 [29] 关于 $k, \aleph$ 空间 (即具有 σ 局部有限 k 网的 k 空间) 或林寿等 [30] 关于 k, k 半层空间的相应结果. 此外，存在闭映射 $f: X \to \mathbb{S}_1$, 其中 X 是 Moore 空间，但是 f 不是边缘 s 映射 [30]. 存在闭映射 $f: X \to Y$, 其中 X 是 $\aleph$ 空间 (甚至，仿紧的 sn 可度量空间), Y 不含闭子空间同胚于 S_ω, 但是 f 不是边缘 s 映射 [30].

问题 2.7 (1) 具有 σ 局部可数 k 网的 k 半层空间是否是 $\aleph$ 空间 [31]?

(2) k 半层正规空间的每一离散闭集族是否有互不相交的序列开扩张？

(3) 具有星可数 k 网的 k 空间是否是 k 半层空间？

(4) k 半层空间性质是否满足控制闭和定理？即若空间 X 由 k 半层空间族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 所控制 (dominated), X 是否是 k 半层空间？

(5) 具有 CCC 性质的 k 半层的 k 空间是否是 Lindelöf 空间？

(6) 连续函数空间 $C_p(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 是否是 k 半层空间？

(7) k 半层空间的伪开、紧映像是否是 σ 空间？

3 k 半层空间的推广

本节主要讨论 k 半层空间的 g 函数推广或广义可数紧空间性质.

对于集合 X 的子集 H 及子集列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 记号 $\{G_n\} \downarrow H$ 表示每一 $G_{n+1} \subset G_n$, 且 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = H$.

定义 3.1 考虑由 g 函数定义或刻画的空间 X 上的拓扑性质：

Nagata 空间：$g(n,p) \cap g(n,y_n) \neq \emptyset \Rightarrow y_n \to p$;

wN 空间：$g(n,p) \cap g(n,y_n) \neq \emptyset \Rightarrow \{y_n\}$ 有聚点;

层空间：H 是 X 的闭集 $\Rightarrow \{\overline{g(m,H)}\} \downarrow H$;

MCP 空间：闭集列 $\{D_n\} \downarrow \emptyset \Rightarrow \{\overline{g(m,D_m)}\} \downarrow \emptyset$;

k 半层空间：$x_n \in g(n,y_n)$ 且 $x_n \to x \Rightarrow y_n \to x$;

$k\beta^+$ 空间：$x_n \in g(n,y_n)$ 且 $\{x_n\}$ 的任一子列有聚点 $\Rightarrow \{y_n\}$ 有聚点;

$k\beta$ 空间：紧集 K 满足 $K \cap g(n,y_n) \neq \emptyset \Rightarrow \{y_n\}$ 有聚点;

$cs\beta$ 空间： $x_n \in g(n, y_n)$ 且 $\{x_n\}$ 收敛 $\Rightarrow \{y_n\}$ 有聚点；

半层空间： $x \in g(n, y_n) \Rightarrow y_n \to x$;

β 空间： $x \in g(n, y_n) \Rightarrow \{y_n\}$ 有聚点.

研究这些空间的目的，一是获得度量化定理，二是分析广义度量空间之间的相互关系，三是建立更精细的广义度量定理. 在文献中，层空间也称 M_3 空间 [4, 32]; MCP 空间 [32] 也称单调可数仿紧空间 [33], 单调 CP 空间 [34] 或 wM_3 空间 [35]; k 半层空间也称强拟 Nagata 空间 [36] 或 ks 空间 [37]; $k\beta$ 空间 [9] 也称 k-MCM 空间 [38], 单调可数 meso 紧空间 [39]; $cs\beta$ 空间 [9] 也称拟 Nagata 空间 [40], 单调可数序列式 meso 紧空间 [39] 或 $k\beta^*$ 空间 [41]; β 空间 [42] 也称单调可数亚紧空间 [33] 或 MCM 空间 [33].

有下述关系：

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\text{Nagata 空间} & \Longrightarrow & \text{层空间} & \Longrightarrow & k\text{ 半层空间} & & & \Longrightarrow & & & \text{半层空间} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & & & \Downarrow \\
\text{wN 空间} & \Longrightarrow & \text{MCP 空间} & \Longrightarrow & k\beta^+\text{ 空间} & \Longrightarrow & k\beta\text{ 空间} & \Longrightarrow & cs\beta\text{ 空间} & \Longrightarrow & \beta\text{ 空间} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & & & \Downarrow & & & & \Downarrow \\
q\text{ 空间} & & \text{可数仿紧} & & \Longrightarrow & & \text{可数 meso 紧} & & \Longrightarrow & & \text{可数亚紧.}
\end{array}
$$

定理 3.2[25] $\mathrm{wN} = k\beta^+ + q$.

Hodel[42] 证明了半层空间等价于具有 G_δ^* 对角线的 β 空间； Kotake[43] 证明了 Nagata 空间等价于具有 G_δ^* 对角线的 wN 空间.

问题 3.3 (1) $\mathrm{wN} + G_\delta$ 对角线 $\Rightarrow$ Nagata 空间？

(2) MCP + 半层 (或 G_δ 对角线) $\Rightarrow$ 层空间 [30]?

(3) $k\beta^+$ + 半层 $\Rightarrow k$ 半层空间？

定理 3.4 (1) 闭且序列商映射保持 $cs\beta$ 空间 [39, 44].

(2) 闭且紧覆盖映射保持 $k\beta$ 空间 [45].

(3) 闭映射保持 $k\beta^+$ 空间 [30].

问题 3.5 (1) k 半层空间关于完备映射的逆像若具有 G_δ 对角线，是否是 k 半层空间 [3]?

(2) $k\beta + q \Rightarrow$ wN?

(3) 完备映射是否保持 $cs\beta$ 空间性质 [39, 44]?

(4) 闭映射是否保持 $k\beta$ 空间性质 [45]?

(5) 是否存在例子说明 $cs\beta \nRightarrow k\beta$ 或 $k\beta \nRightarrow k\beta^+$?

近来，彭良雪 [46], 杨二光和师维学 [47] 对层空间的推广做了进一步的探讨.

定义 3.6[46] 考虑由 g 函数定义的空间 X 上的下列拓扑性质：

弱层： $x_n \in g(n, y_n)$ 且 $\{x_n\}$ 有聚点 $x \Rightarrow \{y_n\}$ 有聚点 x;

弱 MCP: $x_n \in g(n, y_n)$ 且 $\{x_n\}$ 有聚点 $\Rightarrow \{y_n\}$ 有聚点.

此前， Sabella[48] 称弱层 (weakly stratifiable) 空间为逆收敛 (contraconvergent) 空间，Yoshioka[49] 称弱 MCP(weakly MCP) 空间为弱逆收敛 (weak contraconvergent, 简记为 wcc) 空间. 彭良雪在 T_1 假设下讨论了这些空间的刻画，建立了它们的闭映射定理； Yoshioka[49] 也获得了一些结果.

已知的关系有

$$
\begin{array}{ccccccc}
\text{层空间} & \Longrightarrow & \text{弱层空间} & \Longrightarrow & k\text{ 半层空间} & & \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\
\text{MCP 空间} & \Longrightarrow & \text{弱 MCP 空间} & \Longrightarrow & k\beta^+\text{ 空间} & \Longrightarrow & k\beta\text{ 空间.}
\end{array}
$$

关于这些空间类的进一步性质，彭良雪 [46] 提出了一系列问题. 如

(P1) 弱层 $\Rightarrow$ 层空间？

(P2) k 半层 $\Rightarrow$ 弱层？

(P3) k 半层 $\Rightarrow$ 弱 MCP?

(P4) k 半层 $+\ q \Rightarrow$ Nagata?

作者 [27] 给出了正则的弱层空间不是层空间，否定了上述问题 (P1). 邹司伟 [50] 给出了两个例子否定了上述问题 (P2)–(P4)，即存在一个 T_2, k 半层空间不是弱层空间；存在一个 T_1, k 半层的 q 空间既不是弱 MCP 空间，也不是 Nagata 空间.

问题 3.7[46] (1) T_2, $k\beta \Rightarrow$ 弱 MCP?

(2) 弱层空间具有可数积性质吗？

(3) 弱层 T_2 空间还有什么更好的分离性质？

(4) 弱层 $\Rightarrow$ submesocompact 空间？即任一开覆盖 $\mathcal{U}$ 是否存在开加细序列 $\{\mathcal{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得对 X 中任一紧集 C, 都存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathrm{ord}(C, \mathcal{V}_n) < \omega$?

具有 σ 闭包保持 k 网的空间是 submesocompact 空间 [51], 所以可以进一步问：

(5) 弱层空间与 σ 闭包保持 k 网空间的关系如何？

致谢 本文的部分内容曾在漳州师范学院和首都师范大学的一般拓扑学讨论班中报告过. 感谢李克典教授、彭良雪教授的良好建议，同时也要感谢论文的评审专家提出的一些建议.

参考文献

[1] Lutzer, D.J., Semimetrizable and stratifiable spaces, *General Topology Appl.*, 1971, 1: 43-48.

[2] Engelking, R., General Topology(Revised and completed edition), Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[3] 林寿，广义度量空间与映射，第二版，北京：科学出版社，2007.

[4] Borges, C.R., On stratifiable spaces, *Pacific J. Math.*, 1966, 17: 1-16.

[5] Creede, G., Concerning semi-stratifiable spaces, *Pacific J. Math.*, 1970, 32: 47-54.

[6] Heath, R.W., Arc-wise connectedness in semi-metric spaces, *Pacific J. Math.*, 1962, 12: 1301-1319.

[7] Gao Zhimin, On g-function separation, *Questions Answers in General Topology*, 1986, 4: 47-57.

[8] 林寿，K- 半分层空间的注记，苏州大学学报 (自然科学), 1988, 4: 357-363.

[9] 吴利生，关于 k- 半分层空间，苏州大学学报 (自然科学), 1983, 1: 1-4.

[10] Michael, E.A., $\aleph_0$-spaces, *J. Math. Mech.*, 1966, 15: 983-1002.

[11] O'Meara, P., On paracompactness in function spaces with the compact open topology, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1971, 29: 183-189.

[12] Lin Shou, Tanaka, Y., Point-countable k-networks, closed maps, and related results, *Topology Appl.*, 1994, 59: 79-86.

[13] 高国士，关于 k- 网和基，苏州大学学报 (自然科学), 1986, 2: 107-111.

[14] Yan Pengfei, Yang Erguang, Semi-stratifiable spaces and the insertion of semi-continuous functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, 328: 429-437.

[15] Li Kedian, Lin Shou, Shen Rongxin, Insertions of k-semi-stratifiable spaces by semi-continuous functions, *Studia Sci. Math. Hungar.*, 2011, 48: 320-330.

[16] 高智民，K- 半分层空间的某些结果，西北大学学报 (自然版), 1985, 3: 12-16.

[17] Mizokami, T., Shimane, N., On the M_3 versus M_1 problem, *Topology Appl.*, 2000, 105: 1-13.

[18] Sakai, M., On k-networks and weak bases for spaces, *Topology Appl.*, 2010, 157: 2383-2388.

[19] Liu Chuan, Tanaka, Y., Spaces and Mappings: Special Networks, in: Pearl E., Open Problems in Topology II, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 2007, 23-34.

[20] Lin Shou, Covering properties of k-semistratifiable spaces, *Topology Proc.*, 2005, 29: 199-206.

[21] Foged, L., Normality in k- and $\aleph$-spaces, *Topology Appl.*, 1986, 22: 223-240.

[22] Lin Shou, On normal separable $\aleph$-spaces, *Questions Answers in General Topology*, 1987, 5: 249-254.

[23] Henry, M., Stratifiable spaces, semi-stratifiable spaces, and their relation through mappings, *Pacific J. Math.*, 1971, 37: 697-700.

[24] Lin Shou, Mapping theorems on k-semistratifiable spaces, *Tsukuba J. Math.*, 1997, 21: 809-815.

[25] 李克典，林寿，k 半层空间的伪开紧映像，数学学报，2005, 48: 1195-1198.

[26] Gao Zhimin, ℵ-space is invariant under perfect mappings, *Questions Answers in General Topology*, 1987, 5(2): 271-279.
[27] 林寿, 边缘 s 映射、边缘紧映射与 k 半层空间, 数学年刊, 2011, 32A: 229-236.
[28] Yun Ziqiu, On closed mappings, *Houston J. Math.*, 2005, 31: 193-197.
[29] Liu Chuan, Notes on closed maps, *Houston J. Math.*, 2007, 33: 249-259.
[30] Lin Shou, Cai Zhangyong, Liu Chuan, The closed mappings on k-semistratifiable spaces, *Houston J. Math.*, 2009, 35: 139-147.
[31] Lin Shou, A survey of the theory of ℵ-spaces, *Questions Answers in General Topology*, 1990, 8: 405-419.
[32] Ceder, J.G., Some generalizations of metric spaces, *Pacific J. Math.*, 1961, 11: 105-125.
[33] Good, C., Knight, R., Stars, I., Monotone countable paracompactness, *Topology Appl.*, 2000, 101: 281-298.
[34] Pan Chunliang, Monotonically CP spaces, *Questions Answers in General Topology*, 1997, 15: 25-32.
[35] 吴利生, wM_1 空间, 苏州大学学报 (自然科学), 1996, 12(3): 1-4.
[36] Inui, Y., Kotake, Y., Metrization theorems for some generalized metric spaces, *Questions Answers in General Topology*, 1984, 2: 147-155.
[37] Yoshioka, I., On the metrization of γ-spaces and ks-spaces, *Questions Answers in General Topology*, 2001, 19: 55-72.
[38] 彭良雪, 林寿, 关于单调空间与度量化定理, 数学学报, 2003, 46: 1225-1232.
[39] Xia Shengxiang, On monotone countable mesocompactness, *Questions Answers in General Topology*, 2005, 23.
[40] Martin, H.W., A note on the metrization of γ-spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, 57: 332-336.
[41] Gao Zhimin, Yasui, Y., A decomposition of k-semi-stratifiable spaces, *Math. Japonica.*, 1998, 47(2): 199-202.
[42] Hodel, R.E., Moore spaces and $w\Delta$-spaces, *Pacific J. Math.*, 1971, 38: 641-652.
[43] Kotake, Y., On Nagata spaces and wN-spaces, *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sec. A*, 1973, 12: 46-48.
[44] Xia Shengxiang, Yu Zhengwen, Mapping theorems on quasi-Nagata spaces, *Chinese Quart. J. Math.*, 2002, 17: 57-61.
[45] Xia Shengxiang, On $k\beta$-spaces, *Math. Japonica.*, 1995, 42: 557-561.
[46] 彭良雪, 关于弱 MCP 空间与弱层空间, 数学研究与评论, 2007, 27: 738-742.
[47] Yang Erguang, Shi Weixue, Notes on g-functions and MCP and quasi-Nagata-spaces, *Topology Proc.*, 2009, 34: 115-130.
[48] Sabella, R.R., Convergence properties of neighbouring sequences, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1973, 38: 405-409.
[49] Yoshioka, I., Closed images of spaces having g-functions, *Topology Appl.*, 2007, 154: 1980-1992.
[50] 邹司伟, 关于 k 半层空间的一些问题以及推广, 硕士学位论文, 苏州: 苏州大学, 2011.
[51] Lin Shou, Perfect preimages of some spaces, *Northeastern Math. J.*, 1995, 11: 343-348.

The Properties of k-semi-stratifiable Spaces and Related Questions

LIN Shou

(1. Dep. of Math. and Info. Sci., Zhangzhou Normal University, Zhangzhou, Fujian, 363000, P. R. China; 2. Institute of Mathematics, Ningde Teachers' College, Ningde, Fujian, 352100, P. R. China)

Abstract: k-semi-stratifiable spaces are a common generalization of stratifiable spaces and ℵ-spaces. In this paper a survey on k-semi-stratifiable spaces is given, which contains characterizations, properties and generalizations of k-semi-stratifiable spaces. Some questions about k-semi-stratifiable spaces are posed.

Key words: k-semi-stratifiable spaces; g-functions; covering properties; mapping properties; generalized countably compact spaces