第 41 卷第 16 期 数学的实践与认识 Vol.41, No.16
2011年 8 月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY Aug., 2011

强 Σ^* 空间是 D 空间

张 达, 林 寿

(宁德师范学院 数学系, 福建 宁德 352100)

摘 要: 研究了强 Σ^* 空间和 D 空间的关系, 证明了强 Σ^* 空间是 D 空间, 改进了 R. Z. Buzyakova 等的结果.

关键词: D 空间; 邻域指派; 强 Σ^* 空间; 遗传闭包保持集族

1975 年 van Douwen E K[1] 引入了 D 空间的概念, 随后 van Douwen E K 与 Pfeffer W F[2] 又提出关于 D 空间的几个有趣的问题, 引起了人们对于 D 空间的兴趣 [3]. van Douwen E K 所提出的 "Lindelöf 空间是否是 D 空间" 这一问题至今尚未解决. 近期, 关于 D 空间的研究方向之一是围绕怎样的广义度量空间是 D 空间 [4]. 我们知道, σ 紧空间、度量空间、半层空间、仿紧 p 空间都是 D 空间, 2002 年, Buzyakova R Z[5] 证明了强 Σ 空间是 D 空间, 改进了上述结果, 进一步说明了 Lindelöf 的 Σ 空间、仿紧 Σ 空间等也都是 D 空间. 本文加强了这个结论, 更进一步证明了强 Σ^* 空间是 D 空间.

本文所论空间均为满足 T_1 分离性质的拓扑空间.

定义 1[5] 设集族 $\mathcal{T}$ 是空间 X 的拓扑, ϕ 是 X 到 $\mathcal{T}$ 上的一个映射. 称 ϕ 是 X 的邻域指派 (Neighborhood assignments), 若对于每一 $x \in X$, 有 $x \in \phi(x)$. 空间 X 称为 D 空间, 如果对于 X 的任一邻域指派 ϕ, 存在 X 的闭离散子集 D 使得 $X = \cup_d \in_D \phi(d)$.

定义 2[6] 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族, $\mathcal{P}$ 称为遗传闭包保持的, 如果对于每一 $H(P) \subset P \in \mathcal{P}$, 有 $cl(\cup\{H(P) : P \in \mathcal{P}\}) = \cup\{cl(H(P)) : P \in \mathcal{P}\}$ 成立.

定义 3[6] 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族.

1) 对 $A \subset X$, 称 $\mathcal{P}$ 为 A 在 X 中的网, 如果 $A \subset \cap\mathcal{P}$, 并且若 U 是 X 中含 A 的开子集, 那么存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $A \subset P \subset U$.

2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 (mod k) 网, 如果存在 X 的紧覆盖 $\mathcal{K}$ 使得对于每一 $K \in \mathcal{K}$, $\{P \in \mathcal{P} : K \subset P\}$ 是 K 在 X 中的网. 这时称 $\mathcal{P}$ 是关于 $\mathcal{K}$ 的 (mod k) 网.

3) 具有 σ 局部有限闭 (mod k) 网的空间称为强 Σ 空间. 具有 σ 遗传闭包保持闭 (mod k) 网的空间称为强 Σ^* 空间.

显然, 强 Σ 空间是强 Σ^* 空间, 反之不成立 [6].

定理 强 Σ^* 空间是 D 空间.

证明 设 X 是强 Σ^* 空间, 则 X 具有关于某紧覆盖 $\mathcal{K}$ 的 σ 遗传闭包保持闭 (mod k) 网

收稿日期: 2008-11-03
资助项目: 国家自然科学基金 (10271026); 福建省教育厅科研资助项目 (JA04275, JB04195)

$\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_n:n\in N\}$, 其中每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的遗传闭包保持闭集族且 $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$. 将 $\mathcal{P}_n$ 的元良序, 记 $\mathcal{P}_n=\{P_a^n\}_{\alpha<\gamma_n}$.

设 ϕ 是 X 的任一邻域指派, 则只要找到 X 的一个闭离散子集 D 使得 $X=\cup_{d\in D}\phi(d)$. 首先, 对每一 $n\in N$ 归纳定义 X 的子集 D_n.

令 $D_0=\emptyset$. 假设当 $0<m<n$ 时已定义了 X 的子集 D_m. 为了定义 D_n, 对于每一 $\alpha<\gamma_n$ 归纳定义 X 的有限集 D_α^n 如下.

令 $D_0^n=\emptyset$. 假设当 $0<\beta<\alpha$ 时已定义了 D_β^n. 置

$$U=\cup\{\phi(d):d\in(\cup\{D_\beta^n:\beta<\alpha\})\cup D_{n-1}\}$$

记号 R_a^n 表示: 存在 $K\in\mathcal{K},P\in\mathcal{P}_n$ 和 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in K\backslash U$ 使得

$$K\backslash U\subset P\backslash U\subset\phi(x_1)\cup\phi(x_2)\cup\cdots\cup\phi(x_k)$$

如果 $\mathcal{P}_n$ 中没有元 P 满足条件 R_a^n, 则对每一 $\gamma\in[\alpha,\gamma_n)$, 定义 $D_\gamma^n=\emptyset$, 否则定义 $D_a^n=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$.

由此, 再定义 $D_n=(\cup_{\alpha<\gamma_n}D_a^n)\cup D_{n-1}$. 第 n 步的定义完成.

令 $D=\cup\{D_n:n\in N\}$. 下面证明 D 是所求的子集.

1) $X=\cup_{d\in D}\phi(d)$.

若不然, 则存在 $K\in\mathcal{K}$ 使得 $K\backslash\cup_{d\in D}\phi(d)\neq\emptyset$. 记 $L=K\backslash\cup_{d\in D}\phi(d)$, 则 L 是 X 的非空紧子集, 存在 L 的有限子集, 设为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$, 使得

$$L\subset\phi(x_1)\cup\phi(x_2)\cup\cdots\cup\phi(x_k)$$

再记

$$M=K\backslash(\phi(x_1)\cup\phi(x_2)\cup\cdots\cup\phi(x_k))$$

则

$$M\subset K\backslash L\subset\cup_{d\in D}\phi(d)$$

由 M 的紧性, 存在 $j\in N$ 使得 $M\subset\cup_{d\in D_j}\phi(d)$, 从而

$$K\subset\phi(x_1)\cup\phi(x_2)\cup\cdots\cup\phi(x_k)\cup(\cup_{d\in D_j}\phi(d))$$

因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的关于 $\mathcal{K}$ 的 (mod k) 网, 存在 $m\in N$ 和 $P\in\mathcal{P}_m$ 使得

$$K\subset P\subset\phi(x_1)\cup\phi(x_2)\cup\cdots\cup\phi(x_k)\cup(\cup_{d\in D_j}\phi(d))$$

令

$$n=\max\{j,m\},U=\cup\{\phi(d):d\in D_n\}$$

则

$$\cup_{d\in D_j}\phi(d)\subset U,P\in\mathcal{P}_n$$

且

$$x_1,x_2,\cdots,x_k\in K\backslash U\subset P\backslash U\subset\phi(x_1)\cup\phi(x_2)\cup\cdots\cup\phi(x_k)$$

所以条件 R_1^n 成立, 从而 $D_1^n=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$, 因此 $K\subset P\subset\cup_{d\in D}\phi(d)$, 这与假设矛盾.

2) 每一 D_n 是 X 的闭离散子集.

D_0 和 D_0^n 都是 X 的闭离散子集. 假设 D_{n-1} 是 X 的闭离散子集, 为证 D_n 是 X 的闭离散子集, 只须证 $\cup_{\alpha<\gamma_n}D_a^n$ 是 X 的闭离散子集. 令 $\mathcal{P}_n'=\{P_{\tilde\alpha}^n:P_{\tilde\alpha}^n$ 是 $\mathcal{P}_n$ 中第一个满足条件

R_a^n 的元, $\alpha < \gamma_n\}$. 则不同的 $\alpha < \gamma_n$ 所对应的 $P_{\tilde{\alpha}}^n$ 是不同的. 事实上, 设 $\alpha_1 < \alpha_2 < \gamma_n$, 对于 $i = 1, 2$, 记

$$U_i = \cup\{\phi(d) : d \in (\cup\{D_\beta^n : \beta < \alpha_i\}) \cup D_{n-1}\}$$

根据 D_a^n 的定义, 有

$$D_{\alpha_1}^n \subset P_{\tilde{\alpha}_1}^n \backslash U_1 \subset \cup_{d \in D_{\alpha_1}^n} \phi(d)$$

从而

$$P_{\tilde{\alpha}_1}^n \subset U_1 \cup (\cup_{d \in D_{\alpha_1}^n} \phi(d)) \subset U_2$$

那么

$$\emptyset \neq D_{\alpha_2}^n \subset P_{\tilde{\alpha}_2}^n \backslash U_2 \subset P_{\tilde{\alpha}_2}^n \backslash P_{\tilde{\alpha}_1}^n$$

于是 $P_{\tilde{\alpha}_1}^n \neq P_{\tilde{\alpha}_2}^n$.

因为 $\mathcal{P}_n' \subset \mathcal{P}_n$, 所以 $\mathcal{P}_n'$ 是 X 的遗传闭包保持集族. 对于每一 $x \in X$, 由于每一 D_a^n 是有限集, 所以

$$x \notin \cup_{\alpha < \gamma_n} cl(D_a^n \backslash \{x\}) = cl(\cup_{\alpha < \gamma_n} (D_a^n \backslash \{x\})) = cl((\cup_{\alpha < \gamma_n} D_a^n) \backslash \{x\})$$

从而 $\cup_{\alpha < \gamma_n} D_a^n$ 是 X 的闭离散子集.

3) D 是 X 的闭离散子集.

对每一 $x \in X$, 由于 $X = \cup_{d \in D} \phi(d)$, 则存在 $n \in N$, 使得 $x \in \cup_{d \in D_n} \phi(d)$. 由于 D_n 是 X 的闭离散子集, 存在 x 在 X 中的开邻域 V 满足 $V \subset \cup_{d \in D_n} \phi(d)$ 且 V 至多含有 D_n 中的一个点. 从而

$$V \cap D \subset ((\cup_{d \in D_n} \phi(d)) \cap (D \backslash D_n)) \cup (V \cap D_n)$$

对每一 $y \in D \backslash D_n$, 存在 $m > n$ 和 $\alpha < \gamma_m$ 满足 $y \in D_a^m$. 令

$$U = \cup\{\phi(d) : d \in (\cup\{D_\beta^m : \beta < \alpha\}) \cup D_{m-1}\}$$

则 $\cup_{d \in D_n} \phi(d) \subset U$, 且 $D_a^m \cap U = \emptyset$, 于是 $y \notin \cup_{d \in D_n} \phi(d)$. 故 $(D \backslash D_n) \cap (\cup_{d \in D_n} \phi(d)) = \emptyset$. 这表明 V 至多含有 D 中的一个点. 因此, D 是 X 的闭离散子集.

综合 (1) 和 (3), 可知 X 是 D 空间. 命题得证.

参考文献

[1] van Douwen E K. Simultaneous extension of continuous functions[D]. Thesis. Free University. Amsterdam, 1975.

[2] van Douwen E K, Pfeffer W F. Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces[J]. Pacific J. Math, 1979, 81: 371-377.

[3] Borges C R, Wehrly A C. A study of D-spaces[J]. Topology Proc, 1991, 16: 7-15.

[4] Arhangel'skii A V, Buzyakova R Z. Addition theorems and D-spaces[J]. Comment Math Univ Carolinae, 2002, 43: 653-663.

[5] Buzyakova R Z. On D-property of stong Σ-spaces[J]. Comment Math Univ Carolinae, 2002, 43(3): 493-495.

[6] 林寿. 广义度量空间与映射 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.

Strong Σ^*-spaces are D-spaces

ZHANG Da, LIN Shou

(Department of Mathematics, Ningde Normal University, Ningde, Fujian 352100, China)

Abstract: In this paper, the relation of D-space and Σ^*-spaces is studied and it is shown that every strong Σ^*-space is a D-space, which improves a result of R. Z. Buzyakova.

Keywords: D-spaces; neighborhood assignments; strong Σ^*-spaces; hereditarily closure-preserving families