数 学 年 刊
2011,32A(2):229–236

边缘 s 映射、边缘紧映射与 k 半层空间*

林 寿[1]

提要 主要讨论了 k 半层空间上的闭映射性质，证明了 k 半层空间的闭映像若是不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1} (S_ω) 的 k 空间，则该闭映射是边缘 s 映射 (边缘紧映射). 最后给出例子表明弱层空间未必是层空间，否定回答了关于层空间的一个问题.

关键词 k 半层空间，闭映射，边缘紧映射，边缘 s 映射，边缘 Lindelöf 映射， k 空间，弱层空间

MR (2000) 主题分类 54C10, 54D30, 54D50, 54D65, 54E20

中图法分类 O189.11

文献标志码 A

文章编号 1000-8314(2011)02-0229-08

1 引 言

闭映射是研究拓扑性质的基本工具[1]，尤其在讨论广义度量空间性质时，其重要性更为明显. 如，著名的 Morita-Hanai-Stone 定理断言：设 $f: X \to Y$ 是闭映射，若 X 是度量空间，则 Y 是度量空间当且仅当 f 是边缘紧映射，即对于每一 $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ 是紧的. Tanaka[2] 证明，上述定理可以用另一方式表述为：设 $f: X \to Y$ 是闭映射，若 X 是度量空间，则空间 Y 不含同胚于 S_ω 的闭子空间当且仅当 f 是边缘紧映射. Tanaka[2] 还证明了度量空间在闭映射下的像空间不含同胚于 S_{ω_1} 的闭子空间当且仅当该映射是边缘 Lindelöf 映射.

近年来的研究表明，即使不是度量空间，在一定的条件下，闭映射可加强为具有更好性质的映射[3]. 这导致下列问题的提出：

问题 1.1 [4] 设 $f: X \to Y$ 是闭映射. 空间 X 或 Y 在什么样的条件下，对于每一 $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ 具有较好性质？

下面两个定理可供借鉴.

Gruenhage, Michael, Tanaka[5] 证明了下列结果：

定理 1.1 设 $f: X \to Y$ 是闭映射，其中 X 是仿紧 $\aleph$ 空间. 若 Y 是具有点可数闭 k 网络的 k 空间，则 f 是边缘 s 映射，即对于每一 $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ 是可分的.

作者与蔡长勇、刘川获得了下列结果[6]：

定理 1.2 设 $f: X \to Y$ 是闭映射，其中 X 是 k 半层的 k 空间. 若 Y 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1} (S_ω), 则 f 是边缘 s 映射 (边缘紧映射).

本文的主要目的是同时推广上述两个结果，即证明

本文 2010 年 2 月 6 日收到.
[1]漳州师范学院数学与信息科学系，福建 漳州 363000; 宁德师范学院数学研究所，福建 宁德 352100.
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn
*国家自然科学基金 (No. 10971185) 和福建省自然科学基金 (No. 2009J01013) 资助的项目.

定理 1.3 设 $f: X \to Y$ 是闭映射，其中 X 是 k 半层空间. 若 Y 是 k 空间且不含闭子空间同胚于 S_{ω_1} (S_ω), 则 f 是边缘 s 映射 (边缘紧映射).

注意到，(1) $\aleph$ 空间是 k 半层空间[7]; (2) 具有点可数闭 k 网络的空间不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}[5]; (3) 闭映射保持 k 空间性质.

关于定理 1.3 的逆，有下述结果:

定理 1.4 设 $f: X \to Y$ 是商映射，其中 X 是序列空间，且 Y 含有闭子空间同胚于 S_{ω_1} (S_ω). 若 f 是边缘 Lindelöf 映射 (边缘紧映射), 则 X 含有闭子空间同胚于 S_2 或 S_{ω_1} (S_ω).

2 定理的证明

本文所讨论的空间都是满足 T_1 性质且正则的拓扑空间，映射均是连续的满函数. 未定义的记号与术语可参考文 [7].

先引用闭映射的一个性质.

引理 2.1[8] 设 $f: X \to Y$ 是闭映射，其中 X 的每一单点集都是 G_δ 集. 若 K 是 Y 的可数紧子集，$S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 $f^{-1}(K)$ 中的序列，使得 $f(x_n) \neq f(x_m), \forall n \neq m$, 则 S 存在收敛的子序列.

在引理 2.1 的条件下，若 L 是 Y 中的收敛序列，则存在 X 中的收敛序列 S, 使得 $f(S)$ 是 L 的子序列.

k 半层空间是 Lutzer 引入的[9]. 空间 X 称为 k 半层空间，如果对 X 的每一开集 U, 对应闭集列 $\{F(n,U)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足:

(1) $U = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F(n,U)$;

(2) 若两开集 $U \subset V$, 则 $F(n,U) \subset F(n,V)$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(3) 若紧集 $K \subset U$, 则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $K \subset F(m,U)$.

若空间 X 的第一开集有对应的闭集列，满足上述的条件 (1) 和 (2), 则称 X 是半层空间.

k 半层空间是 σ 空间，即具有 σ 局部有限网络的空间，而 σ 空间是半层空间[7]. 易见，半层空间的每一单点集都是 G_δ 集.

空间 X 的子集 U 称为点 $x \in X$ 的序列邻域，若 $\{x_n\}$ 是 X 中任一收敛于 x 的序列，则存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $\{x_n : n \geqslant m\} \subset U$. X 的子集 C 称为序列闭集，若由 C 中点组成的任一收敛序列的极限点仍在 C 中，即 C 关于收敛序列是封闭的. 如果空间 X 的每一个序列闭集都是闭集，则称 X 是序列空间. 空间 X 称为 k 空间，若 X 的子集 A 与 X 的每一紧子集 K 之交集 $A \cap K$ 闭于 K, 则 A 是 X 的闭集.

每一序列空间是 k 空间，反之不成立. 但在每一紧子集可度量化的空间中，序列空间与 k 空间是等价的.

引用 k 半层空间的一个技术性引理.

引理 2.2[6] 设 X 是 k 半层空间. 若 $D = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的离散子集，则存在 X 的互不相交的集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 满足:

(1) 对于每一 $\alpha \in \Lambda$, U_α 是 x_α 的序列邻域;

(2) 对于每一 $\Lambda' \subset \Lambda$, $\{z_\alpha : \alpha \in \Lambda'\} \cup \overline{D}$ 是 X 的序列闭集, 其中 $z_\alpha \in U_\alpha$.

空间 X 的子集族 $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 称为点离散的, 若对于每一点 $x_\alpha \in P_\alpha$, 子集 $\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是 X 的闭离散子空间. 点离散集族也称为弱遗传闭包保持集族.

引理 2.3[10] 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点离散集族. 若 K 是 X 的可数紧集, 则存在 K 的有限子集 F, 使得 $K - F$ 仅与 $\mathcal{P}$ 中的有限个元相交.

回忆扇空间 S_ω 和 S_{ω_1}. 对于每一 $\alpha < \omega$, 设空间 X_α 同胚于具有通常拓扑的收敛序列空间 $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, 其中 X_α 的极限点是 x_α. 对于度量空间 $\bigoplus\limits_{\alpha<\omega} X_\alpha$ 的子空间 $A = \bigoplus\limits_{\alpha<\omega} \{x_\alpha\}$, 形如 $(\bigoplus\limits_{\alpha<\omega} X_\alpha)/A$ 的商空间称为扇空间, 记为 S_ω. 如果在 S_ω 的定义中, 用 ω_1 个收敛序列代替 ω 个收敛序列, 所得到的商空间记为 S_{ω_1}.

定理 1.3 的证明 设 $f : X \to Y$ 是闭映射, 其中 X 是 k 半层空间, Y 是 k 空间且不含有同胚于 S_{ω_1} (S_ω) 的闭子空间.

因为 k 半层空间是 σ 空间, 而闭映射保持 σ 空间性质[7], 所以空间 Y 是 σ 空间. 由于 σ 空间的紧子集是可度量化的[7], 于是 Y 是序列空间.

对于每一 $y \in Y$, 置

$$A = \{x \in f^{-1}(y) : \text{存在 } X - f^{-1}(y) \text{ 中的序列收敛于 } x\}.$$

(1) $\overline{A} = \partial f^{-1}(y)$.

显然 $\overline{A} \subset \partial f^{-1}(y)$. 对于 $x \in \partial f^{-1}(y)$ 及 x 在 X 中的任一邻域 U, 下面证明 $A \cap U \neq \varnothing$. 由正则性, 存在 X 中的开集 V, 使得 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. 若 W 是 y 在 Y 中的邻域, 则 $(f^{-1}(W) \cap V) - f^{-1}(y) \neq \varnothing$, 即 $W \cap (f(V) - \{y\}) \neq \varnothing$, 于是 $y \in \overline{f(V) - \{y\}} \subset \overline{f(V)} = f(\overline{V})$, 从而 $f(\overline{V}) - \{y\}$ 不是 Y 的闭集, 那么 $f(\overline{V}) - \{y\}$ 不是 Y 的序列闭集, 但 $f(\overline{V})$ 是 Y 的闭集, 所以存在 $f(\overline{V}) - \{y\}$ 中的序列 L 收敛于 y. 不妨设序列 L 中的各项是互不相同的. 因为 X 是 k 半层空间, 所以 X 的每一单点集都是 G_δ 集. 由引理 2.1, 存在 $\overline{V}$ 中的收敛序列 S, 使得 $f(S)$ 是 L 的子序列. 由于 $L \subset f(\overline{V}) - \{y\}$, 不妨设 S 是 $X - f^{-1}(y)$ 中的收敛序列. 设 S 收敛于 s, 则 $s \in f^{-1}(y)$, 从而 $s \in A \cap \overline{V} \subset A \cap U$. 因此 $x \in \overline{A}$, 即 $\overline{A} = \partial f^{-1}(y)$.

(2) 设 Y 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 下面证明 $\partial f^{-1}(y)$ 是可分的.

由 (1), 只须证明 A 是可分的. 为此, 先证明 A 是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集, 即子空间 A 的任何不可数子集在 A 中必有聚点. 否则, A 含有不可数子集 D, 使得 D 在 A 中没有聚点. 不妨记 $D = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, 则 D 是 A 的闭的离散子集. 这时, D 也是 X 的离散子集. 由引理 2.2, 存在 X 的互不相交的集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$, 满足引理 2.2 的条件 (1) 和 (2). 对于每一 $\alpha < \omega_1$, 由 $x_\alpha \in A$, 存在 $X - f^{-1}(y)$ 中的序列 L_α 收敛于 x_α, 而 U_α 是点 x_α 的序列邻域, 不妨设 $L_\alpha \subset U_\alpha$, 则 $\{f(L_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ 是 Y 的点离散集族.

事实上, 对于每一 $\alpha < \omega_1$ 及任意的 $y_\alpha \in f(L_\alpha)$, 存在 $z_\alpha \in L_\alpha$, 使得 $f(z_\alpha) = y_\alpha$. 若 $\{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 不是 Y 的闭离散子集, 因为 Y 是序列空间, 则 $\{y_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 中含序列 L 收敛于某点 l, 并且可不妨设序列 L 中的各项是互不相同的. 由引理 2.1, $\{z_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 中含序列 S 收敛于某点 s 且 $f(S)$ 是 L 的子序列, 从而 $f(s) = l$, 且 $f(\overline{S}) = \overline{f(S)} \subset \overline{L}$.

如果 $l \neq y$, 由于每一 $y_\alpha \neq y$, 则 $y \notin \overline{L}$, 那么 $\overline{D} \cap \overline{S} \subset f^{-1}(y) \cap f^{-1}(\overline{L}) = \varnothing$. 再由引理 2.2, S 及其任意子空间都是 X 的序列闭集，这与序列 S 的收敛性相矛盾. 因此 $l = y$, 从而 $s \in f^{-1}(y)$, 故 $s \in A$.

由于 $S \subset X - f^{-1}(y)$, 于是 $\overline{D} \cap \overline{S} \subset \{s\}$. 如果 $s \in \overline{D}$, 由于 D 是 A 的闭子集，于是 $s \in \overline{D} \cap A = D$, 所以存在 $\beta < \omega_1$, 使得 $s = x_\beta \in U_\beta$. 因为序列 S 收敛于 s, 那么有无限个 $z_\alpha \in U_\beta \cap U_\alpha$, 这与集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ 的互不相交性相矛盾. 从而 $\overline{D} \cap \overline{S} = \varnothing$, 仍由引理 2.2, S 及其任意子空间是 X 的序列闭集，矛盾. 至此，证明了 $\{f(L_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ 是 Y 的点离散集族.

对于每一 $\alpha < \omega_1$, 因为 $f(L_\alpha)$ 是 Y 中的收敛序列，由引理 2.3, 存在 $f(L_\alpha)$ 的有限子集 F_α 和 ω_1 的有限子集 Λ_α, 使得当 $\beta \in \omega_1 - \Lambda_\alpha$ 时， $(f(L_\alpha) - F_\alpha) \cap f(L_\beta) = \varnothing$. 令 $K_\alpha = f(L_\alpha) - F_\alpha$. 由超限归纳法，可选取 ω_1 的不可数集 Γ, 使得 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是互不相交的集族. 令 $W = \{y\} \cup (\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} K_\alpha)$, 则 W 同胚于 S_{ω_1}. 如果 W 不是 Y 的闭子集，因为 Y 是序列空间，则有由 W 中点组成的序列 L 收敛于 $Y - W$ 中的某点. 这时，每一 $K_\alpha \cap L$ $(\forall \alpha \in \Gamma)$ 是有限集，于是存在 L 的子序列 L', 使得每一 $K_\alpha \cap L'$ $(\forall \alpha \in \Gamma)$ 至多是单点集. 由于 $\{K_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ 是 Y 的点离散集族，从而 L' 是 Y 的闭子集，矛盾. 综上所述， Y 含有闭子空间 W 同胚于 S_{ω_1}, 矛盾.

以上证明了 A 是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集. 因为 Y 是 σ 空间，于是 A 也是 σ 空间，即 A 具有 σ 局部有限网络. 由于 $\aleph_1$ 紧空间中的每一局部有限集族是可数的 (该结论可参见文 [7] 的定理 6.6.13 后的注记 1), 于是 A 具有可数网络，从而 A 是可分的空间.

(3) 设 Y 不含闭子空间同胚于 S_ω.

与 (2) 类似地证明，当 Y 不含闭子空间同胚于 S_ω 时， A 的任何可数无限子集在 A 中必有聚点，于是 A 是可数紧的. 由于 σ 空间的可数紧子集是紧且可度量化的[7], 从而 A 是紧的. 由 (1), $\partial f^{-1}(y) = \overline{A} = A$ 是紧的.

问题 2.1 定理 1.3 中的正则空间条件是否可减弱为 Hausdorff 空间？

定理 1.4 涉及另一类特殊的商空间 S_2. 设 $T_0 = \{a_n : n \in \omega\}$ 为收敛于 a_0 的序列，对每个 $n > 0$, 序列 T_n 收敛于 $a_n' \in T_n$. 让 T 是空间族 $\{T_n\}_{n\in\omega}$ 的拓扑和. S_2 是把 T 中每一对 a_n, a_n' $(n > 0)$ 贴合成一点 a_n 所得到的商空间. 显然，把 S_2 中所有非孤立点集 (即集 $\{a_0\} \cup T_0$) 贴合成一点所得到的商空间就是 S_ω. 因此 S_ω 是 S_2 在完备映射下的像空间.

定理 1.4 的证明 设 $f : X \to Y$ 是商映射，其中 X 是序列空间，且 Y 含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 不妨设 $Y = \{b\} \cup (\cup\{Y_\alpha : \alpha < \omega_1\})$ 同胚于 S_{ω_1}, 其中 $Y - \{b\}$ 中的序列 Y_α 收敛于 b, 且 Y_α $(\alpha < \omega_1)$ 是互不相交的. 由于每一 Y_α 不是 Y 的闭集，于是 $f^{-1}(Y_\alpha)$ 不是 X 的闭集，从而存在 $f^{-1}(Y_\alpha)$ 中的序列 T_α 收敛于某点 $x_\alpha \in X - f^{-1}(Y_\alpha)$, 则 $x_\alpha \in \partial f^{-1}(b)$. 令 $L = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

(1) 对于每一有限的 $F_\alpha \subset T_\alpha$, $\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} F_\alpha$ 是 X 的闭离散子集.

由于 $\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} f(F_\alpha)$ 是 Y 的闭离散子集，于是 $\{f^{-1}(y) : y \in \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} f(F_\alpha)\}$ 是 X 的离散闭集族，从而 $\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} F_\alpha$ 是 X 的闭离散子集.

分 2 种情形以完成定理的证明.

(2) 设 L 不是 X 的闭离散子集.

由于 X 是序列空间，存在 L 的某一个无限子集 L' 不是 X 的闭集，则又存在 L' 中的由互不相同元组成的序列 $\{x_{\alpha_n}\}$ 收敛于某点 $a \in X - L'$. 令

$$M = \{a\} \cup \{x_{\alpha_n} : n \in \omega\} \cup (\cup\{T_{\alpha_n} : n \in \omega\}).$$

由 (1), M 是 X 的序列闭集且同胚于 S_2, 所以 M 是 X 的闭子集. 因此 X 含有同胚于 S_2 的闭子空间.

(3) 设 L 是 X 的闭离散子集.

因为 $\partial f^{-1}(b)$ 是 Lindelöf 的, 所以 L 是 Lindelöf 的, 从而 L 是可数的. 不妨设 $L = \{a\}$. 令

$$S = \{a\} \cup (\cup\{T_\alpha : \alpha < \omega_1\}).$$

由 (1) 及 X 是序列空间， S 是 X 的闭子空间且同胚于 S_{ω_1}.

对于 S_ω 的情形，利用 f 的边缘紧性，同理可证空间 Y 含有闭子空间同胚于 S_2 或 S_ω.

空间 X 称为 Fréchet 空间，若 $x \in \overline{A} \subset X$, 则存在 A 中的序列收敛于 x. 显然 Fréchet 空间是序列空间. S_ω 和 S_{ω_1} 都是 Fréchet 空间，但是 S_2 不是 Fréchet 空间.

推论 2.1　设 $f : X \to Y$ 是商映射，其中 X 是 Fréchet 空间且不含闭子空间同胚于 S_{ω_1} (S_ω), 若 f 是边缘 Lindelöf 映射 (边缘紧映射), 则空间 Y 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1} (S_ω).

定理 1.4 及推论并没有使用空间的正则性条件. 利用与 S_2 类似的构造，我们说明推论中 Fréchet 空间的条件不可减弱为序列空间.

设集 $T_{\omega_1} = [0, \omega_1]$ 赋予下述拓扑：每一 $\alpha < \omega_1$ 是孤立点，点 ω_1 的邻域具有有限余性质. 那么空间 T_{ω_1} 是紧空间. 对于每一 $\alpha < \omega_1$, 设序列 T_α 收敛于 $\alpha \notin T_\alpha$. 让 T 是空间族 $\{\{\alpha\} \cup T_\alpha : \alpha < \omega_1\} \cup \{T_{\omega_1}\}$ 的拓扑和. S 是把 T 中每一对 α ($\alpha < \omega_1$) 贴合成一点所得到的商空间，则 S 是序列空间且不含闭子空间同胚于 S_ω (当然，也不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}). 显然，把 S 中所有非孤立点集贴合成一点所得到的商空间就是 S_{ω_1}, 且商映射 $q : S \to S_{\omega_1}$ 是完备映射.

3　两个例子

本节给出两个例子，一是说明在定理 1.3 中，假设像空间 Y 是 k 空间的条件是必不可少的；二是对层空间中某类包含关系的逆问题给予了否定的回答.

例 3.1　存在闭映射 $f : X \to Y$, 其中 X 是仿紧 $\aleph$ 空间， Y 不含闭子空间同胚于 S_ω, 但 f 不是边缘 s 映射.

对于每一 $\alpha < \omega_1$, 让 $X_\alpha = \{p\} \cup \mathbb{N}$, 其中取定 $p \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$, 且 $\{p\} \cup \mathbb{N}$ 赋予 Stone-Čech 紧化 $\beta\mathbb{N}$ 的子空间拓扑. 由于 X_α 是可数的正则空间，所以它是仿紧空间. 又由于 X_α 的每一紧子集是有限集，所以它是 $\aleph$ 空间 (具有 σ 局部有限 k 网络的空间称为 $\aleph$ 空间，其

中空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k 网络，若 X 的紧子集 K 含于 X 的开集 U 中，则存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{P}'$，使得 $K\subset\cup\mathcal{P}'\subset U$.)．令 $X=\bigoplus_{\alpha<\omega_1}X_\alpha$，则 X 是仿紧 $\aleph$ 空间 (当然，X 也是 k 半层空间)．再令 A 是 X 的全体聚点构成的集合，则 A 是 X 的闭子集．对于商集 $Y=X/A$，令 $f:X\to Y$ 是自然商映射，则 f 是闭映射．因为 X 是仿紧空间，所以 f 是紧覆盖映射 (映射 $f:X\to Y$ 称为紧覆盖的[7]，如果 Y 的每一紧子集是 X 的某一紧子集在 f 下的像．仿紧空间上的闭映射必是紧覆盖映射[7].)．由于 X 的紧子集都是有限集，所以 Y 的紧子集也都是有限集，因此 Y 也就不含闭子空间同胚于 S_ω．但 $\partial f^{-1}([A])=A$ 不是可分空间，所以 f 不是边缘 s 映射．

上述空间 Y 具有点可数闭 k 网络，所以定理 1.1 中像空间 Y 是 k 空间的条件也不可省去．

在给出第 2 个例子之前，先介绍彭良雪[11] 引入的弱层空间．文 [11] 讨论了弱层空间的性质，并提出了与层空间相关的几个空间类之间关系的一些问题．我们将对其中的一个问题给出否定的回答．

空间 X 称为弱层空间，如果对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 和 $x\in X$，对应 X 的开集 $g(n,x)$(称之为 X 的 g 函数) 具有下列性质：

(1) $x\in g(n+1,x)\subset g(n,x)$;

(2) 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足： $x_n\in g(n,y_n)$ 且序列 $\{x_n\}$ 有聚点 $x\in X$，则序列 $\{y_n\}$ 有聚点 x.

已知的关系[11]：层空间 $\Longrightarrow$ 弱层空间 $\Longrightarrow$ k 半层空间．问题是上述关系是否可逆？下面的例子说明弱层空间未必是层空间．

例 3.2 存在不是层空间的弱层空间．

分别记全体实数集，全体有理数集为 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Q}$．取 $X=\mathbb{R}\cup\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}\times\{\frac{1}{n}\}\big)$．$X$ 赋予下述拓扑：

(1) $X-\mathbb{R}$ 中的点是 X 的孤立点;

(2) 对于每一 $x\in\mathbb{R}$，点 x 在 X 中的邻域基元形如

$$\{x\}\cup\Big(\bigcup_{n\geqslant m}([a_{x,n},x)\cap\mathbb{Q})\times\Big\{\frac{1}{n}\Big\}\Big),\quad 其中\ m\in\mathbb{N},\ 实数\ a_{x,n}<x.$$

则 X 是非正规的正则空间[3] 例 3.4.18(2).

由于层空间是正规空间，所以 X 不是层空间．下面证明 X 是弱层空间．

空间 X 的 g 函数定义如下：对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 和 $x\in X$，令

$$g(n,x)=\begin{cases}\{x\}, & x\notin\mathbb{R},\\ \{x\}\cup\Big(\bigcup_{m\geqslant n}\mathbb{Q}\times\Big\{\dfrac{1}{m}\Big\}\Big), & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

设 X 中的序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足： $x_n\in g(n,y_n)$ 且 $\{x_n\}$ 有聚点 $x\in X$.

若 $x\notin\mathbb{R}$，记 $x=(q,\frac{1}{m})$，则 x 是 X 的孤立点，于是有无限项 $x_n=x$，从而 $x\in g(n,y_n)$.

如果 $y_n \in \mathbb{R}$, 那么当 $n > m$ 时，有

$$g(n, y_n) \cap \left(\mathbb{Q} \times \left\{\frac{1}{m}\right\}\right) = \varnothing,$$

因此对于满足 $x_n = x$ 且 $n > m$ 的 n, 必有 $y_n \notin \mathbb{R}$, 这时 $y_n = x_n = x$, 从而 x 也是序列 $\{y_n\}$ 的聚点.

若 $x \in \mathbb{R}$, 由点 x 的邻域构成，则或者无限项 $x_n = x$, 或者不妨设所有 $x_n \notin \mathbb{R}$. 如果无限项的 $x_n = x$, 则对这些 n, $x \in g(n, y_n)$, 于是 $y_n = x$, 所以 x 仍是 $\{y_n\}$ 的聚点. 如果所有 $x_n \notin \mathbb{R}$, 当仅有有限项 $y_n \in \mathbb{R}$ 时，那么对充分大的 n, 有 $x_n = y_n$, 所以 x 是 $\{y_n\}$ 的聚点. 当有无限项 $y_n \in \mathbb{R}$ 时，如果设 x 是子序列 $\{x_n\}_{y_n \in \mathbb{R}}$ 的聚点，通过下标替换，不妨设所有 $y_n \in \mathbb{R}$, 则对于每一 $m \in \mathbb{N}$, 当 $n > m$ 时，有

$$x_n \in g(n, y_n) \subset X - \left(\mathbb{Q} \times \left\{\frac{1}{i} : i \leqslant m\right\}\right),$$

从而 $\mathbb{Q} \times \{\frac{1}{m}\}$ 中仅含有 $\{x_n\}$ 中的有限项，于是存在实数 $a_{x,m} < x$, 使得所有的 $x_n \notin [a_{x,m}, x) \times \{\frac{1}{m}\}$. 令

$$U = \{x\} \cup \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} ([a_{x,m}, x) \cap \mathbb{Q}) \times \left\{\frac{1}{m}\right\}\right),$$

则 U 是 x 的邻域且所有的 $x_n \notin U$, 即 x 不是 $\{x_n\}$ 的聚点. 这一矛盾表明：有无限项的 $y_n \notin \mathbb{R}$ 且 x 是子序列 $\{x_n\}_{y_n \notin \mathbb{R}}$ 的聚点，这时 x 是 $\{y_n\}$ 的聚点.

综上所述， X 是弱层空间.

参　考　文　献

[1] Burke D K. Closed mappings [C]//Reed G M (ed). Surveys in General Topology. New York: Academic Press, 1980:1–32.

[2] Tanaka Y. Metrizability of certain quotient spaces [J]. *Fund Math*, 1983, 119:157–168.

[3] 林寿. 广义度量空间与映射 [M]. 2 版. 北京：科学出版社， 2007.

[4] Tanaka Y, Liu Chuan. Fiber properties of closed maps, and weak topology [J]. *Topology Proc*, 1999, 24:323–344.

[5] Gruenhage G, Michael E, Tanaka Y. Spaces determined by point-countable covers [J]. *Pacific J Math*, 1984, 113:303–332.

[6] Lin Shou, Cai Zhangyong, Liu Chuan. The closed mappings on k-semistratifiable spaces [J]. *Houston J Math*, 2009, 35:139–147.

[7] 高国士. 拓扑空间论 [M]. 2 版. 北京：科学出版社， 2008.

[8] Lin Shou, Tanaka Y. Point-countable k-networks, closed maps, and related results [J]. *Topology Appl*, 1994, 59:79–86.

[9] Lutzer D J. Simemetrizable and stratifiable spaces [J]. *General Topology Appl*, 1971, 1:43–48.

[10] Okuyama A. On a generalization of Σ-spaces [J]. *Pacific J Math*, 1972, 42:485–495.

[11] 彭良雪. 关于弱 MCP 空间与弱层空间 [J]. 数学研究与评论, 2007, 27:738–742.

Boundary-s-Mappings, Boundary-Compact-Mappings and k-Semistratifiable Spaces

LIN Shou[1]

[1]Department of Mathematics and Information Science, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000, Fujian, China; Institute of Mathematics, Ningde Normal University, Ningde 352100, Fujian, China.
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn

Abstract The closed mapping properties of k-semistratifiable spaces are discussed. It is shown that every closed mapping on k-semistratifiable spaces is a boundary-s-mapping (resp. boundary-compact-mapping) if the image is a k-space and contains no closed copy of S_{ω_1} (resp. S_ω). Finally, an example is given to show that a weak stratifiable space is not necessarily a stratifiable space. Thus, a question about stratifiable spaces is negatively answered.

Keywords k-semistratifiable spaces, Closed mappings, Boundary-compact-mappings, Boundary-s-mappings, Boundary-Lindelöf-mappings, k-spaces, Weak stratifiable spaces

2000 MR Subject Classification 54C10, 54D30, 54D50, 54D65, 54E20